ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO CII

Segundo semestre de 1926

BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

684 — CALLE PERÚ — 684

—

1926

HOMENAJE A LA MEMORIA DEL INGENIERO OTTO KRAUSE

El día 5 de noviembre próximo pasado se realizó en el vestíbulo principal de la Escuela industrial de la Nación el acto de inauguración de un busto colocado en homenaje a la memoria de este hombre ilustre, organizador de la enseñanza industrial en la República Argentina.

Se encontraban presentes los ministros: de Instrucción pública doctor Antonio Sagarna, del Interior doctor José P. Tamborini, de Relaciones exteriores doctor Ángel Gallardo, de Agricultura ingeniero Emilio Mihura, de Marina almirante Domecq García, el rector de la Universidad, doctor Ricardo Rojas, los decanos de las Facultades de Ciencias exactas, físicas y naturales de Buenos Aires y de Ciencias físicomatemáticas de La Plata, ingenieros Huergo y Castiñeiras, senadores, diputados nacionales, profesores universitarios y de la Escuela industrial y la mayor parte de los diplomados y alumnos actuales de la Escuela.

En nombre de los profesores de la Escuela, pronunció un discurso conceptuoso el ingeniero Eduardo Sarrabayrouse, haciendo entrega del busto, discurso que fué contestado por el director de la Escuela, ingeniero Eduardo Latzina.

Hablaron después el ingeniero Julio R. Castiñeiras, en representación de los diplomados en la Escuela industrial, el ingeniero Ricardo García, en representación del Centro nacional de ingenieros, y el estudiante Héctor Prada por los actuales alumnos.

Todos los oradores recordaron la labor meritoria desarrollada por el extinto, como profesional, profesor universitario, director de la Escuela industrial que ahora lleva su nombre, decano de la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales, y en otros cargos importantes.

LA DIRECCIÓN.

LA LUCHA BIOLÓGICA CONTRA EL BICHO DE CESTO

(OECETICUS KIRBYI, var. PLATENSIS)

SEGUNDA SERIE
DE CARTAS CONFIRMATORIAS DE SUS RESULTADOS ALTAMENTE POSITIVOS

POR EL DOCTOR JUAN BRÈTHES

En 1922, la Sociedad Rural Argentina publicó un folleto con el título de *El bicho de cesto, campaña de 1920-1921.* En ese folleto, ilustrado con una serie de dibujos y fotografías pertinentes, se daba una breve reseña de cuanto se había hecho hasta entonces acerca del bicho de cesto y de la lucha que se había emprendido a su respecto.

Allí, también, se publicaron una larga serie de cartas que la Sociedad Rural Argentina había recibido de muchísimas partes de la República Argentina en el inmenso triángulo que tiene por vértices las provincias de Entre Ríos, Mendoza y Buenos Aires: en esas cartas los estancieros se manifestaban satisfechos, varios con palabras que denotaban ese alivio (¡ por fin conseguido!) de que no tendrían más que habérselas con una plaga tan importante.

Desde entonces, habiéndose seguido el tomar nota de las cartas que se recibían sobre el mismo asunto, me veo hoy poseedor de una documentación preciosa que no quiero dejar por más tiempo silenciada. De paso, añadiré todavía algunos datos que pueden ser de interés general. Al hacerlo así, creo y estoy convencido que la lucha biológica contra el bicho de cesto por medio de la *Parexorista Caridei* constituye un elemento de inmenso valor para los intereses agrícolas de la República Argentina, y también estoy convencido que hago obra de positiva utilidad al volver sobre el mismo.

Antes que se iniciara la lucha biológica contra el bicho de cesto, había tenido la oportunidad de estudiar varios parásitos que contri-

buyen a destruirlo. Desde el momento que se emprendió esa lucha, tuve también la suerte de participar en ella de un modo directo. Así he podido seguir paso a paso cuanto se ha hecho sobre ese asunto.

Sin embargo, no quiero ir más adelante y relatar cuanto a ello se refiere sin insistir en que no ha pasado ello como si hubiese surgido espontáneamente y por la gracia de una feliz casualidad: son pocos los éxitos así conseguidos...

Desde su iniciación, el Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina recogía y recibía bichos de cesto de todas partes. Esos bichos de cesto se abrían cuidadosamente, se catalogaban las observaciones pertinentes; se tomaba nota de los parásitos que se encontraban y se clasificaban éstos; aquellos cestos cuyos habitantes aparecían « podridos », se estudiaban también del punto de vista bacteriológico, y se procuraban las inoculaciones por ingestión y otras... Todo ello fué un trabajo que se hizo silenciosamente, trabajo largo y por mucho tiempo sin resultados aparentes.

Decir la cantidad de observaciones, de esperanzas frustradas, de desengaños prácticos, ¿ no es ello la parte preliminar y necesariamente silenciada de todos los éxitos ? ¿ No perdió Zeppelin alrededor de un cuarto de siglo en pruebas, contrapruebas, tentativas, experimentaciones, etc., etc., que han quedado todas en el silencio ?

Por lo que toca al bicho de cesto, se publicaron algunos resultados entomológicos en los *Anales de la Sociedad Rural Argentina,* antes de llegar a la *Parexorista Caridei.*

Me complazco en relatar, bien que sea someramente, todos esos trabajos preliminares, no sea que algunas personas crean que el encontrar un parásito significa necesariamente un feliz éxito. El caso del bicho de cesto viene a corroborar esa afirmación; sobre 17 especies parasitantes, tan sólo la *Parexorista Caridei* y el *Tetrastichus platensis* tienen una acción realmente económica.

Pero vino el momento providencial: una de esas ideas verdaderamente geniales vino a proporcionar la clave que se buscaba desde tanto tiempo. Es el doctor don Pedro Caride Massini, tan apreciado bajo otros conceptos, particularmente por su método curativo de la *Autoterapia,* quien hizo la observación inicial, observación tan fecunda en resultados positivos, observación que nos proporcionó la maravillosa *Parexorista Caridei.*

Observó Massini que en ciertas partes de la provincia de Córdoba había una casi total ausencia de bichos de cesto: intrigado por ese hecho insólito, se empeñó en buscar bichos de cesto; después de

buscarlos con ahinco, pudo reunir unos cuantos, pero pocos, y éstos se encontraban en un estado de desarrollo perfectamente normal. Por lo que resulta de ese enunciado, que trato de expresar en términos lo más sencillos posibles, esa observación hubiese podido hacerla cualquier persona. ¿ Por qué le cupo al doctor Caride solo ver lo que todos hubiesen podido ver ? En eso consisten los rasgos geniales, y el doctor Caride Massini debe reivindicar para sí ese relámpago que había de producir tantos beneficios. El doctor Caride sacó la conclusión : si allí hay pocos bichos de cesto, y si los que existen tienen un desarrollo normal, algo debe destruirlos a medida que aparecen, hay que buscar ese *algo*.

Se concluyó, por lo tanto, en que había que llevar allí bichos de cesto para dar con el *algo* problemático. Y así se hizo... Vueltos a traer a Buenos Aires, esos bichos de cesto proporcionaron una buena cantidad de moscas todas iguales entre sí; tuve el gusto de estudiar esa mosca para su clasificación y reconocí que era un animal aún no señalado en la ciencia universal. Fué para mí un gusto a la vez que un deber dar a ese insecto beneficioso el mismo nombre de su descubridor : *Parexorista Caridei.*

El *algo* que se buscaba estaba bajo nuestra vista : era la misma *Parexorista* recién nombrada. Pero era todavía necesario comprobar que el *algo* problemático correspondía a esa mosca : era necesario cambiar en certidumbre lo que no era todavía más que una posibilidad. Esa mosca pertenece a un grupo de dípteros que son esencialmente parásitos de otros insectos, particularmente de las larvas de las mariposas. Ese grupo de dípteros, las taquinarias, son típicamente benefactoras y no hay peligro que vengan a ser un azote, como sería, por ejemplo, la *mosca brava.*

Era también necesario averiguar si esa mosca *Parexorista* se hallaba en los puntos donde se pretendía llevarla para comprobar sus buenos efectos. Si se hubiese encontrado, por ejemplo, en la provincia de Buenos Aires, donde tanto abundan los bichos de cesto, era inútil pensar en su distribución en dicha provincia, pues no se veían ya sus resultados. Se pidieron bichos de cesto con ese objetivo directo y se comprobó que la *Parexorista* no existía en Buenos Aires. Mientras tanto, se estudiaban también los numerosos parásitos cuyo número, como dije, llegó a ser de 17 especies diferentes, quedando con la convicción que ese número no es todavía el definitivo.

Comprobada la ausencia de la *Parexorista Caridei* en los puntos que se quería saber, se acumularon en Buenos Aires grandes remesas

de bichos de cesto parasitados en Córdoba, y se fueron distribuyendo a los estancieros, arboricultores, etc., que habían hecho los pedidos correspondientes.

Entonces empezaba la lucha biológica por medio de la *Parexorista Caridei.* Como se acaba de ver, ese momento había sido precedido por una larga serie de trabajos que conviene que el lector tome muy en cuenta. Las comprobaciones previas se habían realizado con la mayor escrupulosidad: científicamente no se podía exigir más. A la experimentación le tocaba ahora decir la última palabra.

Ése fué un momento de expectativa personal. Confesaré con toda llaneza que sentí también el aguijón de la duda, y no dudo que cualquiera de buena fe hubiese experimentado las mismas aprensiones. Por otra parte, personas que me rodeaban me manifestaban sin eufemismos y con raciocinios — científicos — que la lucha biológica no representa un medio científico para destruir las plagas... ¡ Qué cinta cinematográfica se admiraría hoy si se viesen las fisonomías intelectuales de todo calibre que actuaban entonces !

Además, ¿ cómo fortalecer mis esperanzas personales y cómo contestar a las personas que negaban una acción verdadera a la lucha biológica ? Era sólo el resultado final el que debía responder afirmativa o negativamente... Si en otras partes del mundo, la lucha biológica había dado resultados óptimos, ¿ no era un deber de probar éste también aquí en que nunca se había hecho nada en ese sentido ? Y ya en ese momento se podían aplicar estas palabras de Silvestri: « En 1907, en contestación a los que querían juzgar *a priori* el método de lucha natural con el fin de desacreditarlo, y de hacer triunfar, por diferentes motivos, de hoy en adelante bien conocidos, el método artificial antes que su eficacia fuese indiscutible... »

Desde cerca de 50 años atrás, la ciencia entomológica económica registra uno de sus primeros triunfos con un éxito feliz con la introducción del *Apanteles glomeratus* a Norte América; después de ese éxito bien comprobado, varios otros éxitos han venido a dar *fuerza de hecho* a la aplicación de la lucha biológica. Luego en sí la lucha biológica no se discute más. Sólo se discute cada caso en particular, pudiendo suceder, en efecto, que un parásito que se ha creído verdaderamente eficaz no sea de tal eficacia. Lo que significa que en los momentos en que se pretendía comprobar la eficacia de la *Parexorista Caridei,* no tenían razón los que querían condenar con una sola sentencia cualquier clase de lucha biológica: en eso demostraban, los que así afirmaban, que hasta ignoraban los hechos ya producidos.

Quiero, por lo tanto, creer que los que afirmaban que la lucha biológica no era de resultados prácticos, afirmaban por simple ignorancia; les hubiese sido peor aplicarles las palabras de Silvestri, que « querían juzgar *a priori* el método de lucha natural con el fin de desacreditarlo y de hacer triunfar el método artificial por diferentes motivos, de hoy en adelante bien conocidos... »

A ese respecto, Silvestri emplea algunas palabras más severas: « Sería verdaderamente criminal... » Repito que no puedo admitir que haya habido personas que criticaron la lucha natural sino por simple ignorancia.

Felizmente que los éxitos conseguidos por medio de la *Parexorista Caridei* vinieron a cumplir todas las esperanzas que se habían cifrado en ella y hasta acallar las exigencias más difíciles.

Las cartas que se publicaron en 1922 y las que se copian a continuación son un caudal enorme de preciosos documentos que se pueden enseñar a amigos y enemigos, a los que aceptan de buena fe y a los recalcitrantes.

Hay que considerar que la lucha biológica comporta una complejidad de condiciones concurrentes que es sumamente difícil controlar: condiciones de clima, de adaptabilidad de una especie zoológica, de parasitismo, de multiplicación suficiente... El que pretendiese *a priori* aplicar una especie parasitante contra una plaga tan sólo después de haber comprobado la aplicabilidad de cada una de las condiciones anotadas, podemos afirmar que aun después de cien años estaría todavía en comprobaciones estériles.

Por lo demás, todos los problemas de aplicación económica, ¿ no quedan siempre supeditados a la experimentación ?

Por consiguiente, al dar hoy a la estampa esta segunda serie de cartas, hágolo con la persuasión de que sirvo los intereses agrícolas de la República Argentina de una manera eminentemente positiva, deseando tan sólo que las personas serias, honradas, bien intencionadas, saquen de este artículo el mayor provecho posible.

A la vez, les ruego no olvidar que ello es el fruto del genio del doctor don Pedro Caride Massini.

CARTAS EN LAS QUE SE DA CUENTA DE LA ACCIÓN DE LA « PAREXORISTA CARIDEI »

1

María L. de Bellocq
Establecimiento « Galpones de Bellocq »
Partido de General Paz
Estación Loma Verde (F. C. M. V.)

Galpones de Bellocq, febrero 2 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Creo que da buen resultado esa mosca, porque para esta fecha del año pasado no quedaba en el monte una hoja; en cambio este año sólo ha sufrido mucho un rincón, aunque hay bichos de cesto en el resto del monte, pero en cantidad muy reducida...

Saluda a usted muy atentamente.

Por María L. de Bellocq

N. V. Gauly.

2

« San Pedro »
Justo U. de Campos y Compañía
Villa Mantero (F. C. E. R.)

San Pedro, febrero 2 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: En mi poder su muy atenta de 28 de enero, que tengo el gusto de contestar. Me complace comunicarle que el resultado de la mosca *Parexorista Caridei*, con que han venido infestando los gusanos que nos han enviado en los dos años anteriores, ha dado un óptimo resultado a juzgar por la diminución de bichos de cesto que ha sido casi total y hoy es raro y difícil encontrarlo en las plantaciones que tenemos. Los que le envié para su observación son de los pocos que quedan.

Muy agradecido por la ayuda que ha prestado ese Instituto contra plaga tan dañina, tiene el gusto de saludar a usted muy atentamente

Por Justo Urquiza de Campos & Cía.

Adolfo Campos Urquiza.

3

Estancia « La Escondida »

Pazos Kanki (F. C. O.), febrero 3 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico.

Sarmiento 834.

Muy señor nuestro: Acompañamos con la presente, guía de encomienda por un cajón de bichos de cesto.

Es nuestra opinión que sus envíos de años anteriores están dando muy buenos resultados en ésta, pues adonde hemos puesto la mosca *Parexorista,* casi no hay bichos de cesto, y en el monte de 10 hectáreas cerca de Coronel Granada y tres leguas de acá adonde no hemos puesto la mosca, las hojas de los álamos y sauces han sido completamente comidas por la plaga...

Por Enrique Brown & Hnos.

Franck Preston.

4

Estancia « La Saudade »
Saavedra (F. C. S.)

Saavedra, febrero 1 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío: Por encomienda a domicilio le remito hoy un cajoncito con bichos de cesto sacados de plantas de acacia. No puedo enviar más, pues hay muy pocos; la cantidad que le remito es lo que ha juntado un hombre en medio día. Notamos que en este segundo año de aplicación de la *Parexorista* hay una insignificante cantidad

de bichos de cesto, en proporción a la cantidad que antes había, lo que nos es muy satisfactorio comunicar a usted.

Saluda a usted atentamente

Por Francisco Mendes Gonçalves.

5

Buenos Aires, enero 30 de 1922.

Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señores míos: La mosca en cuestión me ha dado muy buenos resultados en Coronel Brandzen, establecimiento « La Estancia » de Sáenz Valiente hermanos. Felicito a ese Instituto por los resultados obtenidos y saluda atentamente S. S. S.

Guillermo Sáenz Valiente.

6

Juan Lalor
Consignatario
Haciendas, Frutos, Cereales y Comisiones en general
Bartolomé Mitre 311

Buenos Aires, 3 de febrero de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Ciudad.

Tengo el gusto de comunicarle que he comprobado que la mosca hace un buen trabajo y ha muerto muchos bichos de cesto en la estancia donde se depositaron los mandados el año pasado por ese Instituto.

Siempre a sus órdenes, lo saluda atentamente S. S. S.

Juan Lalor.

7

Carabelas, febrero 3 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío : No sé el grado de propagación existente de la *Parexorista Caridei,* pero puedo asegurarle que desde que se repartió la remesa que tuvo a bien hacernos ese Instituto, la plaga del bicho de cesto ha desaparecido casi por completo; tanto es así, que se hace sumamente difícil hasta la recolección de la cantidad necesaria para llenar un simple cajón como el que me solicita.

Saludo a usted con mi consideración más distinguida.

Daniel Iribarne.

Estación Carabelas, C. G. B. A.

8

Julio Vilela
« Las Marinas »
Las Flores (F. C. S.)

Las Flores, febrero 3 de 1922.

Señor Director :

Muy señor mío : El resultado de los bichos de cesto parasitados que me fueron remitidos en su oportunidad por ese Instituto, ha sido muy halagüeño, porque ya desde el año anterior se observó la exterminación de la plaga en toda clase de árboles, casi por completo.

Con mucha dificultad he podido conseguir esos pocos en unas plantitas nuevas de acacia blanca, formados de brotes de raíces alrededor del monte.

Felicitando a usted por el éxito de sus trabajos, me complazco en saludarlo y subscribirme su muy atento y S. S.

Julio Vilela.

9

José Aguirre Urreta e Hijo
Estancia « La Elvira »

Estación Anguil (F. C. O.), febrero 7 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Con esta misma fecha remito un cajoncito conteniendo bichos de cesto que se pudieron recoger de varios árboles, porque los hay muy pocos. El año pasado, para esta época, estaban los árboles deshojados por el bicho de cesto; hoy lo contrario, y sólo se encuentra uno que otro. Es opinión que la *Parexorista Caridei* ha producido buen resultado.

Sin más, saluda a usted atentamente S. S. S.

José Aguirre U.

10

Coronel Suárez, febrero 7 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Sarmiento 834.

Muy señor mío: El año pasado hubo en el monte una enormidad de bichos de cesto, obligándome a que yo hiciera a ese Instituto el pedido de los bichos de cesto con el parásito *Parexorista Caridei.* Ustedes me dirán ahora, después de examinar los cestos, que yo les envío, si se ha producido el fenómeno, pues este año son muy raros los cestos nuevos que se observan en las plantas.

Saluda a usted muy atentamente

Diego Green.

11

Casón (F. C. S.), febrero 8 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: En contestación a su estimada carta de fecha 28 de enero, tengo el gusto de manifestarle que en mis montes ha sido

extirpado el bicho de cesto por la *Parexorista Caridei* que se sirvieron remitirme en el verano de 1920.

Muy agradecido por los servicios que presta ese Instituto, saluda a usted atentamente S. S. S.

Manuel Escudero.

12

Uribelarrea (F. C. S.), febrero 9 de 1922.

Señor Director :

Presente.

Muy señor mío : Adjunto guía por un cajón de bichos de cesto. Se ha juntado próximamente a la parte que ha cundido más y en que el año pasado no se puso de los que usted me remitió infestados, pues en dicha parte es muy poco lo que hay.

Saluda a usted muy atentamente S. S. S.

D. Davel.

13

Flores, febrero 7 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío : En contestación a su atenta de fecha 4 del corriente, me es grato comunicarle que del cajón de bichos de cesto que me remitieron el año pasado, fué de una eficacia sorprendente pues no quedaron bichos de cestos ni para semilla.

Sin más, y quedando a sus órdenes, saluda a usted muy atentamente S. S. S.

José M. Pinel.

14

Santa Elena, febrero 8 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío : Este año se nota mucho menos bicho de cesto que el año pasado. Saluda a usted atentamente S. S. S.

Juan M. Lavayen.

15

Trenque Lauquen, febrero de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío: Le remito por encomienda postal un cajoncito de bichos de cesto. Este año hay muy pocos.

Con tal motivo lo saluda muy atentamente S. S. S.

Juan B. A. Bras.

16

Leopoldo Ojea
Abogado
Calle 26. número 268
Mercedes (Bs. As.)

Fortín Tiburcio (F. C. P.), febrero 28 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Señor mío: El año pasado había muchos bichos de cesto, pero este año hay muy pocos, no obstante, que en otras partes hay en gran cantidad; el monte se encuentra muy lindo, no sé si será porque la mosca haya producido efecto, o porque se limpió mucho. Esto también se hizo porque ese Instituto me dijo que lo podía hacer.

Lo saluda muy atentamente su afectísimo

Leopoldo Ojea.

17

« La Constancia »
Ramón & Vicente Moras

Treinta de Agosto (F. C. O.), febrero 10 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío: Al mismo tiempo me es sumamente grato agradecerle el envío de bichos de cesto infectados con la mosca *Parexorista Caridei*, que ese Instituto me hizo el año pasado en este mes. El resultado ha sido muy satisfactorio, tanto que ahora es muy raro encontrar un bicho de cesto desarrollado y que trabaje, a pesar de ser

el monte bastante grande y con mucha acacia blanca, y ser el primer año que trabaja esa mosca.

Agradecido, lo saluda a usted muy atentamente S. S. S.

Ramón M. Moras.

18

Estancia « Gleen Muy »
Daniel Morgan

Pegasano (F. C. P.), febrero 9 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834.

Muy señor mío : Aquí ha muerto este año mucho bicho, por lo que creo debe estar infectado y si así fuese, y ustedes tuvieran que remitir a alguna persona de esta zona, me ofrezco desinteresadamente a remitir donde ustedes me ordenen.

Sin otro motivo, lo saluda atentamente S. S. S.

Por Daniel Morgan

José J. Morgan.

19

Manuel P. Poblet
Establecimiento « Las Calaveras »

Estación La Negra (F. C. S.), febrero 11 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Buenos Aires.

Muy señor mío : He podido constatar actualmente una notable diminución de dicho insecto, al extremo que para recolectar los nacidos este año, hubo que registrar bastantes árboles del monte.

Siempre muy agradecido al señor director por su cooperación en la extirpación de esta plaga, me es grato saludarle muy atentamente S. S. S.

Manuel P. Poblet.

20

Establecimiento « San Ramón »
Manuel y Alberto R. García
Luan Toro (F. C. O.)

Luan Toro, febrero 10 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Buenos Aires.

Respecto a los bichos de cesto, comunicamos a usted que en nuestra estancia no hay, siendo éstos poco conocidos por esta zona (Pampa), a pesar de haber grandes arboledas de variadas clases de plantas especialmente álamos, sauces, etc., siendo éstas las plantas que por excelencia ataca el bicho de cesto. El año pasado se nos remitió, de dicho Instituto, un cajoncito con centenares de bichos de cesto con la mosca *Parexorista Caridei* y fueron éstos repartidos como indicaba el prospecto adjunto por el Instituto, y que hasta la fecha no hemos encontrado un solo bicho de cesto, por cuyas razones no podemos complacer a usted con su pedido de remisión.

Si se trata que la mosca *Parexorista Caridei* puede obrar como medida preventiva, rogamos de su amabilidad se nos remita un cajoncito, pues queremos ser cooperadores de tan digna empresa beneficiosa.

Sin otro particular, saludamos a usted atentamente Ss. Ss.

M. y A. García.

21

Carlos Guerrero
« Estancia Chica »
Banderaló (F. C. O.)

Banderaló, febrero 15 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío: Los bichos de cesto remitidos por ese Instituto, fueron recibidos en el verano de 1919-1920. Me place informarle que este año noto una gran merma de bichos en el monte que calculo en un 60 por ciento.

Sin más, salúdalo atentamente S. S. S.

Carlos Guerrero.

22

« Gran Balneario Argentino »
de Zárate Hnos.
Nueva Rambla Bristol
U. T. 327
Anexo Playa Pescadores
U. T. 614
Mar del Plata

Mar del Plata, febrero 19 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Distinguido señor: Me es grato participarle que hemos combatido en una forma enérgica la plaga y nos dió muy buen resultado la *Parexorista Caridei.*

Sin otro particular, dándole las gracias por su atención, salúdanlo muy atentamente Ss. Ss. Ss.

Zárate Hnos.

23

Establecimiento « La Juanita »
Estación Altona (F. C. S.)

Altona, febrero 17 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío: El año pasado infecté un monte que dista unas 20 cuadras del que hoy infecto, y he notado este año que en aquél los bichos de cesto son sumamente escasos y que muchos se encuentran fofos, sin bicho en el interior, lo que presumo será debido al buen efecto producido por la mosca *Parexorista Caridei.*

Muy agradecido a su amable atención, me complazco en saludar a usted S. S. S.

Marcelo Viña.

24

Juan Cousté
Comerciante en Cereales, Agricultor y Criador
Las Martinetas (F. C. S.)

Las Martinetas, febrero 18 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Distinguido señor: Pongo en su conocimiento que las moscas que me mandaron el año pasado, me dieron buen resultado; en el monte

en donde puse ese año, se encuentran algunos bichos de cesto, pero pocos, y en los montes donde no puse, los hay en gran cantidad.

Saluda a usted su afectísimo.

Juan Cousté.

25

Estancia « Santa Catalina »
Est. Hale (F. C. S.)
Francisco González
Bolívar 1358, Buenos Aires

Hale (F. C. S.), febrero 16 de 1922.

Quiero creer que aquí la mosca da resultado, por cuanto la invasión es pequeña, y no se nota daño en los montes; en el del número 5, donde el año pasado nació mucho y murió antes de ponerse grande, este año no hay.

Saluda a usted atentamente S. S. S.

Francisco González.

26

Garmendia Hermanos
Remates-Ferias
Saavedra & Tornquist
Escrit. Lavalle 83
Teléf. nº 12
Saavedra (F. C. S.)

Saavedra (F. C. S.), febrero de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Respecto al resultado obtenido con los enviados el año anterior, nos es muy grato manifestarle que el resultado ha sido muy bueno, pues en la época que fueron distribuídos los bichos de cesto, había una gran cantidad, los que han desaparecido casi en su totalidad, siendo muy escasas las plantas que hoy tengan bichos de cesto.

Muy agradecidos por su atención, lo saluda muy atentamente S. S. S.

Garmendia Hnos.

27

Emilio Barcia Trelles
Ingeniero Agrónomo
Cangallo 824

Buenos Aires, marzo 6 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: De conformidad con sus indicaciones, me es grato remitirle un cajón de bichos de cesto procedentes de un monte situado en la estación Espigas, e infectado el año pasado con la *Parexorista Caridei*, que ese Instituto se sirvió proporcionarme, habiéndose notado una extraordinaria diminución de los efectos destructores de aquel lepidóptero.

Con este motivo, me es grato saludar a usted atentamente

E. Barcia Trelles.

28

Gavagnin & Capdevielle
Dir. Tel.: Capdevielle
v. 36/F. C./BZ

Casilda, marzo 30 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Respecto a la invasión de este insecto que notábamos, nos satisface manifestarle que observamos una diminución muy apreciable y confiamos en el éxito de las medidas tomadas.

Muy agradecidos por su atención, nos subscribimos de ustedes atentos y Ss. Ss.

Cavagnin & Capdevielle.

29

Nueve de Julio, abril 12 de 1922.

Señor doctor Juan Brèthes, Instituto Biológico de la Sociedad Rural.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Tengo el monte de acacia, álamo y sauce, lo más lindo, lo que sucedió todo lo contrario en los años anteriores por el gran daño causado por el bicho de cesto.

Sin más, lo saluda atentamente S. S. S.

Juan Casco.

30

Instituto de Euskal-Echea
1ª y 2ª Enseñanza
Llavallol (F. C. S.)

Llavallol, junio 7 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico.
Buenos Aires.

Con satisfacción debo manifestar a usted que este año hemos estado muy aliviados de la plaga de « canastos », lo que nos inclina a avanzar en el camino de la hipótesis hacia el resultado eficaz de la *Parexorista* en esta zona.

Queda a sus gratas órdenes y saluda a usted atentamente S. S. S.

P. Cipriano.

31

Carlos G. Lehmann
Ingeniero Agrónomo

Tornquist (F. C. S.), junio 8 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Me es muy grato de comunicar a usted que en el verano pasado había muchos menos bichos de cesto en mis árboles que en años anteriores, y es probable que el envío de bichos infectados que usted ha tenido a bien de hacerme, ha dado ya algún resultado.

Agradeciendo sus grandes servicios, saluda a usted muy atentamente S. S. S.

C. G. Lehmann.

32

José F. Campos
« La Violeta »
Part. de General Viamonte (F. C. P.)
« El Peligro »
Part. de General Alvear (F. C. S.)

« La Violeta », julio 10 de 1922.

A la Sociedad Rural Argentina.
Sarmiento 834, Buenos Aires.

En el establecimiento « El Peligro », en la provincia de Buenos

Aires, ha dado muy buen resultado, y hay una gran diminución de bichos en todos los montes.

Saluda a usted atentamente

Por José F. Campos

N. Campos.

33

Francisco Roca
« La Carmela »
French (F. C. O.)

« La Carmela », agosto 21 de 1922.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío: He notado con muchísima satisfacción que el bicho de cesto ha disminuído en una forma asombrosa. No sé si esto obedece a que el invierno pasado se prolongó casi hasta octubre, o si en realidad es la mosca *Parexorista Caridei* la que los ha destruído.

Si fuera esto último, no habría con que recompensar la obra de ustedes por los beneficios que esto reportaría a la República y muy especialmente a los que tenemos bien arraigado el culto del árbol, fiel compañero del hombre en las soledades de la Pampa.

Saluda a usted atentamente S. S. S.

F. Roca.

34

Piazza Hnos. e Hijos
Azul

Azul, diciembre 23 de 1922.

Señor doctor Francisco Rosenbusch. Instituto Biológico de la Sociedad Rural.

Buenos Aires.

De mi mayor consideración: ...Además tengo el agrado de comunicar a usted, que he constatado la casi total destrucción de los bichos de cesto en el monte donde llevé los infectados que me enviaron el año pasado.

Me es muy grato saludar a usted con toda consideración S. S. S.

Federico T. Piazza.

35

Intendencia Municipal
de la Capital Federal

Buenos Aires, enero 11 de 1923.

Señor doctor don Francisco Rosenbusch, director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Presente.

Me es sumamente grato dirigirme al señor director, solicitándole quiera tener a bien el servirse disponer lo necesario a fin de que por intermedio de la Sección entomológica, a cargo del doctor Juan Brèthes, se facilite a esta Dirección una cantidad de « bichos de cesto » parasitados por la mosca *Parexorista Caridei,* cuya aplicación ha dado óptimos resultados en los ensayos a que fuera sometido.

Con mi mayor consideración

Carlos L. Thays,
Director de paseos públicos.

36

Doctor Emilio B. Iglesias
Abogado
Mercedes (Bs. As.)

Mercedes, enero 12 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío : ... pues me han dado muy buen resultado el año pasado, en una parte del monte donde los coloqué.

De usted muy atento y S. S. S.

E. B. Iglesias.

37

Estancia « La Cecilia »
General Alvear

General Alvear, enero 10 de 1923.

Señor Jefe del Laboratorio de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío : ... el anteaño pasado puse la mosca en dos montes que los tenía pelados por el bicho de cesto, y en un año quedaron limpios hasta la fecha.

Doctor Pedro A. Robles.

38

Granja « Santa Ana »
F. M. Iribarne
Carabelas (C. G. B. A.)

Carabelas, enero 11 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Distinguido señor: Hace dos años tuvieron a bien enviarme una remesa de bichos de cesto con *Parexorista Caridei,* los que repartí, obteniendo un resultado excelente.

Saluda a usted atentamente S. S. S.

Daniel Iribarne.

39

« Estancia Vieja »
Villanueva (F. C. S.)

Villanueva, enero 17 de 1923.

Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Buenos Aires.

Muy señores míos: Habiendo tenido excelentes resultados con el bicho de cesto infectado cuando estuve en la zona de 25 de Mayo, les remito ahora por separado un lote de bichos, rogándoles devolvérmelos una vez infectados.

Agradeciendo a ustedes de antemano, saluda a ustedes muy atentamente S. S. S.

Harold W. Bingham.

40

« La Constancia »
Ramón y Vicente Moras

Treinta de Agosto, enero 17 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío: El año pasado, como tuve el placer de manifestar a usted, esta mosca y avispitas que vinieron en cestos infectados dieron un resultado muy bueno, de lo que estuve muy satisfecho.

Saluda a usted atentamente S. S. S.

Ramón M. Moras.

41

A. Bordelois
Alberdi (Pacífico)

La Calandria, febrero 1º de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío: Noto este año una considerable merma de la plaga, lo que no sé si debo atribuir a la acción de la mosca *Parexorista Caridei,* o bien a otras causas.

Saluda a usted muy atentamente

A. Bordelois.

42

Alberto Brondi
Estancia « La Paterna »

Estación Curarú (C. G. B. A.), febrero 5 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Señor director: Tengo el agrado de acusar recibo a su circular del 26 de enero pasado, referente a la mosca *Parexorista Caridei;* y en contestación me es grato manifestarle que el resultado ha sido eficaz, estando libres las avenidas y montes donde se pusieron los bichos inoculados que el Instituto se sirvió remitirme, habiendo avenidas de acacia blanca (Robinia), que son tan perseguidos por este parásito que conservan toda su hoja; — como se puede dar una idea por la fotografía que adjunto; la hilera de árboles de la derecha es de acacias — en cambio, en los montes de los puestos de este establecimiento donde no se pusieron bichos tratados, en razón de no alcanzar los que remitió el Instituto, los montes están completamente arruinados por el bicho de cesto, presentando un aspecto desconsolador. Reitero, por lo tanto, con esta oportunidad, que se sirva ordenar que se me remita la cantidad posible de bichos inoculados para distribuir en los ocho puestos de esta estancia, y para llevar también a otro establecimiento que poseo en Colonia Seré, donde la plantación presenta un aspecto desconsolador, tan atacada está por el bicho de cesto.

Saluda al señor director atentamente S. S. S.

Alberto Brondi.

43

Establecimientos « Pastizales »
Berutti (F. C. O.)

Berutti (F. C. O.), febrero 5 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Al mismo tiempo he de manifestarle que este año la invasión de esta plaga ha sido considerable, pero hemos observado que en los montes donde se repartió la mosca *Parexorista Caridei,* el daño ha sido casi imperceptible.

Sin otro motivo, saluda a usted muy atentamente S. S. S.

Por Establecimientos Pastizales, Estancias Argentinas S. A.

Juan J. Piridal.

44

Enrique C. Crotto
« La Italia »
Estación Crotto (F. C. S.)

Febrero 9 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Hace tres años, ese Instituto me remitió cestos infectados con la mosca *Parexorista Caridei*, y hoy cumplo comunicándole que la existencia de bichos de cesto, aquí es *diez veces* menor que la que era hace tres años. También van en el cajoncito los palitos de manzano infectados pudiendo proporcionarles mayor cantidad si es que así lo desearen.

Saluda a usted atentamente S. S. S.

Enrique C. Crotto.

45

« La Cheltonia »
Venado Tuerto (F. C. C. A.)

12 de febrero de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor nuestro: Me es grato comunicarles que noto una gran diminución en la cantidad de bichos de cesto, este año en los puntos

adonde coloqué los cestos infectados con la mosca *Parexorista Caridei* el año pasado; las acacias blancas, que ya eran siempre peladas en esta fecha, se presentan con unas hojas un poco comidas, y creo que, si no fuera por la seca que ha causado la caída de tantas hojas, la diferencia en el follaje sería muy notable.

Saluda a usted S. S. S.

Por Foster Hermanos

D. H. Mathew.

46

Estancia « La Lola »
Mones Cazón (C. G. B. A.)

Mones Cazón (C. G. B. A.), febrero 18 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: Este año noto que hay más bichos de cesto que el pasado, pero en los sitios donde puse la mosca el año pasado hay muchos menos.

Se despide de usted y lo saluda atentamente S. S. S.

Nicolás Achaval (hijo).

47

Estancia « Santa Ana »

James Craik (F. C. C. A.), febrero 19 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.
Buenos Aires.

Muy señor mío: He notado que en la primavera ha salido mucho de esta peste, pero ahora no se nota más, y los bichos chicos no han criado más. Así que es seguro que la mosca *Parexorista Caridei* ha dado este resultado.

Con este motivo, saluda a usted atentamente S. S. S.

Por. J. M. Pinnell

G. W. Bagnall.

48

Municipalidad de Cosquín
Córdoba

Cosquín, febrero 19 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Este año se nota mucho menor cantidad de bichos de cesto, lo que es de presumir se haya aclimatado la mosca *Parexorista Caridei.*

Agradeciendo al señor director el interés que se toma por este asunto de interés general, queda a la espera de sus gratas órdenes

Agustín Marcuzzi,
Intendente.

49

Enrique S. Pérez
Establecimiento ganadero « Las Yucas »
Estación Monasterio (F. C. S.)

Febrero 15 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina, doctor Francisco Rosenbusch.

Buenos Aires.

Muy señor mío : Aquí este año la invasión es muy extensa e intensa, alcanzando a devastar montes donde antes no se conocía, en un total para este establecimiento de más o menos 70 hectáreas, repartidas por todo el campo. Sin embargo, me complazco en comunicarle que en los montes donde el año pasado se colocaron bichos parasitados, este año el destrozo es menor. Por eso desearía enviasen la cantidad de bichos parasitados necesaria, para hacer la destrucción en forma.

Saluda a usted atentamente

Por Enrique S. Pérez

E. Pérez Catán.

50

« La Puna »

Catriló (F. C. O.), febrero 19 de 1923.

Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señores nuestros: Nos es grato avisarles que aparentemente la mosca está dando buen resultado, pues donde hemos colocado la mosca, este año hay mucho menos bichos de cesto, que hemos tenido por muchos años.

Saludámosles atentamente

Drysdale & Oldham.

51

« La Enriqueta »
Enriqueta T. de Lütjohann

Capilla del Señor (F. C. C. A.), febrero 20 de 1923.

Señor Director:

Agradezco doblemente su envío de bichos de cesto, sabiendo el buen resultado que se obtiene de ellos. Hace dos años, tenía en mi propiedad una cierta parte, donde los árboles estaban completamente pelados por el efecto de esos bichos. Hoy en día, están más lindos que nunca.

Dándole nuevamente las gracias por su atención, saluda a usted muy atentamente

Enriqueta T. de Lütjohann.

52

M. Ibáñez Froeham
Granja Roja
Saladillo (F. C. S.)

Saladillo, 22 de febrero de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 831, Buenos Aires.

Ha de recordar usted que hace dos años me envió bichos de cesto parasitados, y mi amigo, el ingeniero Delio Demaría Massey, debe

haberle dicho el resultado favorable que me dió ese envío, pues le pedí le expresara ese buen éxito.

Soy atentamente S. S. S.

M. Ibáñez Frocham.

53

José M. de Nevares
« El Rosario »
General Pinto
Eduardo Costa (F. C. O.)

Febrero, 23 de 1923.

Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Buenos Aires.

Muy señores míos : En el monte donde se pusiera la mosca el año pasado no había casi bichos de cesto, pero en general hay una cantidad enorme.

Saluda a ustedes atentamente S. S. S.

Por José M. de Nevares

N. J. Nelson.

54

Ricardo Henckel
Buenos Aires

Superí 1629, mayo 8 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834.

Muy señor mío : Tengo la satisfacción de anunciarle que en mi jardín (superficie 2000 m²), casi no existen más bichos de cesto ; la mosca *Parexorista* va a tener que morirse de hambre o emigrar.

Felicito a usted muy calurosamente por el maravilloso éxito de sus afanes científicos, pero ante todo por la tenacidad y el entusiasmo puestos en la obra de divulgación.

Saluda a usted atentamente S. S. S.

Ricardo Henckel.

55

Ángel Marini
Estancia « Los Ángeles »
Estación Blaquier (F. C. P.)
Escritorio : Sarmiento 1519
Buenos Aires

Buenos Aires, junio 7 de 1923.

Señor Gerente de la Sociedad Rural Argentina.

Muy señor mío : ...los bichos de cesto infectados con la mosca *Parexorista Caridei*, que me dieron tan buen resultado los años pasados.

Con las gracias anticipadas, saluda a usted atentamente S. S. S.

Ángel Marini.

56

Juan Lalor
Consignatario
Haciendas, Frutos, Cereales
y Comisiones en general
Bartolomé Mitre 311

Buenos Aires, 21 de junio de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Presente.

Muy señor mío : Acuso recibo de su atenta de fecha 18 del actual. Tomo nota de su contenido y en contestación, manifiesto a usted que sin embargo, yo he notado en dos de mis estancias una gran diminución de bichos de cesto, desde que me mandó ese Instituto. Estimaré que cuando lo crea conveniente, me haga mandar a este escritorio algunos cajoncitos más.

Agradeciéndole sus atenciones, y felicitándolo por los éxitos obtenidos, lo saluda atentamente S. S. S.

Juan Lalor.

57

Estancia « La Margarita »
Estación Rosales (F. C. P.)
Agentes en Buenos Aires
Drabble Hnos. & Cía.
73, Chacabuco, 73

Estancia « La Margarita », agosto 27 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor nuestro : Como nosotros hemos adoptado este procedimiento hace ahora dos años seguidos, y los señores Brown y Wilson (a quienes compramos este establecimiento), los dos años anteriores, es decir, cuatro años desde que empezamos la campaña contra el bicho de cesto, y como hemos obtenido muy buenos resultados con dicho procedimiento, pues los bichos que hay están en muy pequeñas cantidades.

Lo saludan a usted muy atentamente Ss. Ss. Ss.

Por Gerard A. & Marión A. Dale

Thomas E. Flood.

58

Gavagnin & Capdevielle
Dir. Tel. : « Capdevielle »

Casilda, marzo 2 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor nuestro : Para su mayor ilustración, nos es grato manifestarle que dichos bichos fueron sacados del mismo sitio donde se largaron el año pasado los inoculados, notando este año una menor aparición.

Aguardando sus gratas, lo saludamos atentamente Ss. Ss. Ss.

Gavagnin & Capdevielle.

59

« San Pedro »
Justo U. de Campos & Cía.
Villa Mantero (F. C. E. R.)

Estancia « San Pedro », marzo 6 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor nuestro: Al mismo tiempo nos complace de comunicarle que el resultado de las remesas de años anteriores ha sido muy bueno y hoy ya es difícil de encontrarle en las plantaciones.

Muy agradecido por la ayuda que nos ha prestado ese Instituto contra una plaga tan dañina, tenemos el gusto de saludar a usted muy atentamente y S. S.

Por Justo Urquiza de Campos & Cía.

Adolfo Càmpos Urquiza.

60

Juan E. Auzmendi
« El Campito »
Bonifacio (F. C. S.)

Febrero 4 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor mío: Este año se conocen bien los efectos seguramente de la *Parexorista*, pues hay mucho menos bicho de cesto que otros años.

Lo saluda atentamente S. S. S.

J. E. Auzmendi.

61

Junín, marzo 10 de 1923.

Señor Presidente de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Buenos Aires.

Muy señor mío: Tengo el agrado de dirigirme al señor presidente, para preguntarle con respecto a la mosca *Parexorista,* para combatir al bicho de cesto si habiéndose aplicado ella el año pasado a su tiempo se quedó sin hojas por efecto de la gran cantidad del mismo, y este año después de haberle aplicado la mosca, la que fué remitida por esa Sociedad Rural, se ha notado la aparición de muy pocos bichos de cesto y no ha sufrido nada.

Desearía saber si se debe continuar poniendo la mosca *Parexorista* o es suficiente con la del año pasado.

Quedándole altamente agradecido, lo saluda atentamente S. S. S.

Antonio Regés.

62

« La Monita »
Nicanor Insúa
(F. C. O.), Carhué (F. C. S.)

Adolfo Alsina, marzo 12 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Sarmiento 834, Buenos Aires.

Muy señor mío : Como puede verse, los cestos han sido completamente destruídos y comidos por la mosca *Parexorista Caridei,* quedando muchos también con el bicho muerto antes de colgarse en los árboles.

Es entendido que a todos no los ha debido atacar la mosca y le ruego quiera informarme del resultado que obtengan al hacer el estudio de los que les remito de mi establecimiento.

Agradeciéndoles su atención, me es grato saludarlo muy atentamente S. S. S.

Nicanor Insúa.

63

Estancia « Chucul », S. A.
Mosso Hnos. Ltda.
Coronel Baigorria (F. C. C. A.)

Coronel Baigorria, 8 de septiembre de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Buenos Aires.

Muy señor nuestro : Acusamos recibo a su muy atenta 23 de agosto próximo pasado, comunicándonos que se ha notado la existencia de la mosca *Parexorista Caridei,* en los bichos de cesto que en su oportunidad le hemos remitido. Le agradecemos y nos interesa mucho tener científicamente comprobado lo que nosotros hemos hecho prácticamente hace ya bastante tiempo, por la disminución en forma inesperada de la citada plaga en esta estancia.

Poniéndonos a sus órdenes, nos complacemos en saludar al señor director muy atentamente Ss. Ss. Ss.

Por S. A., *Mosso Hnos Ltda.* (ilegible).

64

San Francisco de Venado Tuerto, Quinta « El Día »

Octubre 25 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico.

Buenos Aires.

Distinguido señor: Remítole el cajoncito con algunos bichos de cesto, para que los mande analizar. Ha tenido muy buen efecto aquí la mosca sobre los bichos de cesto, y estoy por creer que no quedan más; pero si algunos se han salvado, cuando aparezcan los días cálidos, serán exterminados.

Doy las infinitas gracias a la ciencia que ha descubierto una salvación para los árboles, principal adorno de la naturaleza.

Agradeciendo nuevamente las finas atenciones de esa honorable institución biológica, donde los hombres pacientes investigan para el bien de la humanidad, saluda atentamente S. S. S.

Elías Casagrande Hnos.

65

Doctor Pedro A. Robles
Clínica general, especialmente niños y señoras
B. de Irigoyen 1152

Diciembre 21 de 1923.

Señor Director del Instituto Biológico de la Sociedad Rural Argentina.

Tengo el placer de informarle que la aplicación del bicho de cesto infectado, me ha vuelto a dar este año un resultado espléndido. Hasta la fecha no noto que se haya desarrollado casi ningún cesto: tengo más de 300.000 plantas de álamos, sauces y acacias. Estoy por esto muy grato y con mis felicitaciones, hago partícipes a ustedes del buen resultado obtenido. Este otro año, recién tendré macizos de hoja permanente para que la mosca *Caridei,* pueda refugiarse y no sea destruída por el frío de invierno, cual me pasó la otra vez. S. S. S.

P. A. Robles.

Por mi parte, agregaré también mi modesta observación. En el verano 1915-1916, noté particularmente la calle Bebedero, en General Urquiza (F. C. C. A.), desde la plaza Esteban Echeverría hacia el oeste. Allí los bichos de cesto asolaban lastimosamente los árboles en ambas veredas: las deyecciones de esos insectos caían al suelo como una fina granizada de municiones. En el verano 1917-1918, el mal había seguido en todo su esplendor. Llevé a mi casa unas cuantas pupas de *Parexorista Caridei* (no llegarían a 20) y dejé que las moscas se desarrollaran libremente. Los años subsiguientes observé una admirable diminución de bichos de cesto. Hasta la fecha no he vuelto a ver las cantidades de aquellos años, ni por mucho...

. . . .

Las arriba de 60 cartas, que acaban de leerse, forman con las que se publicaron en 1922, un precioso caudal de documentos que en cualquier momento servirán para demostrar la importancia que representa el descubrimiento de esa mosca maravillosa, la *Parexorista Caridei*. Quiera el lector echar una ojeada sobre el mapa, señalar la enorme serie de puntos geográficos en donde se ha hecho sentir la acción benéfica de esa mosca.

No me desagradaría que las personas dadas a los estudios psíquicos descubrieran los múltiples caracteres que han redactado esos diferentes documentos: allí se notarían los caracteres sanguíneos que, sin poder reprimir su admiración por la falta ya de bichos de cesto en sus estancias, se expresan con las palabras que vuelan; en otra carta se lee a un carácter más reposado que no se atreve, por miedo a errar, sino a manifestar que le parece que hay diminución de bichos de cesto en su propiedad. Y toda la infinita serie de los colores cromáticos se puede recorrer allí con una satisfacción imposible de sofrenar: son cientos de personas cuyas firmas no se pueden poner en duda, son cientos de estancieros que cuidan sus intereses, son cientos de hombres que expresan su sentir honradamente.

Hágome la impresión que ésta es la *Vox populi* sensata, reposada, meditada... en lugar de la *vox populi* multitudinaria...

Por lo cual, creo que la lucha biológica contra el bicho de cesto por medio de la *Parexorista Caridei*, es de resultados positivos, siendo de aconsejar su aplicación en toda la República Argentina y en las repúblicas vecinas.

SOBRE UNA GENERALIZACIÓN DEL DESARROLLO EN SERIE DE LAURENT

POR J. C. VIGNAUX
Doctor en Ciencia matemática

INTRODUCCIÓN

1. Importancia fundamental tiene, en la teoría de funciones de variable compleja, *la serie de Laurent,* la cual permite representar una función $f(z)$ holomorfa dada en una corona circular, mediante la suma de dos series convergentes, una según las potencias positivas de $x - a$ y la otra según las potencias positivas de $\frac{1}{x-a}$.

M. Borel, utilizando su teoría de las series divergentes sumables, ha logrado extender el campo de representación de una función dada por su desarrollo tayloriano, a una región mucho más amplia, en general, que su círculo de convergencia: región que la denomina *polígono de sumabilidad* [1].

En este trabajo nos proponemos encontrar para la serie de Laurent una generalización análoga a la conseguida por M. Borel para la serie de Taylor.

Demostraremos, en efecto — imitando el razonamiento de Borel y del trabajo antes citado — la sumabilidad (B) de la serie de Laurent divergente, en una región que llamaré *dominio* (L), el cual contiene en su interior la corona circular de convergencia de la misma. La sumabilidad es además uniforme y absoluta en todo dominio finito interior al *dominio* (L).

[1] E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes,* capítulo III, 1913, y *Leçons sur les fonctions monogènes,* 1918.

J. C. VIGNAUX, *Sobre el desarrollo de una función holomorfa en série de Taylor-Borel,* en *Revista de la Universidad de Buenos Aires,* 1926.

Con el fin de facilitar la lectura de este trabajo a los lectores no familiarizados con la teoría de las funciones analíticas, recordaremos en pocas líneas las nociones indispensables en todo lo que sigue.

2. *Generalidades.* — Sea una serie de potencia de una variable compleja z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \qquad (z = x + iy)$$

cuyo radio de convergencia suponemos finito e igual a *uno;* es decir

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1. \tag{1}$$

Para todo punto z cuyo módulo supere a la unidad, la serie es divergente.

Formemos la serie de potencia

$$u(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \frac{t^n}{n!}, \tag{2}$$

llamada *serie asociada* de la (1), donde t representa una variable *real* y *positiva* y tal que para cada valor de z sea una trascendente entera respecto a t.

Si la integral impropia

$$s(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} u(t, z)\, dt, \tag{3}$$

tomada sobre el eje real positivo, es convergente, diremos con Borel que la serie (1) es *sumable* (B) en el punto z y su *suma generalizada* es el valor de la integral (2).

La serie (1) es *absolutamente sumable* para $z = z_0$, según Borel, si las integrales

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \left| u^{(\nu)}(t, z_0) \right| dt, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

son convergentes. Las series enteras sumables absolutamente son las únicas estudiadas por Borel [1].

Del estudio de las series *simplemente sumables* (B) nos hemos ocupado en un trabajo anterior, publicado en este mismo lugar.

Finalmente, diremos que la serie (1) es *uniformemente sumable* (B)

[1] *Loc. cit.*

para todo punto z de una cierta región D, si la integral de Borel (3) *converge uniformemente; esto es, dado un número* ε *positivo arbitrariamente pequeño, se puede hacer corresponder otro número* $L > 0$, *tal que*

$$\left| \int_l^{\infty} e^{-t} u(t, z)\, dt \right| < \varepsilon,$$

para $l \geq L$; *siendo* L *el mismo para todo punto* z *del dominio* D [1].

3. *Serie de Laurent.* — Consideremos una corona circular limitada por las circunferencias C y c concéntricas de radio respectivamente igual a R y r ($R > r$) y centro en el punto $z = 0$. Sea $f(z)$ una función holomorfa en esta corona y sobre las circunferencias C y c, y del punto x perteneciente a la corona como centro describimos el círculo (γ) situado todo él entre C y c. Se tiene la igualdad

$$\int_{(C)} \frac{f(z)\, dz}{z - x} = \int_{(c)} \frac{f(z)\, dz}{z - x} + \int_{(\gamma)} \frac{f(z)\, dz}{z - x},$$

las integrales son tomadas sobre estas circunferencias en un determinado sentido. Además, por la fórmula de Cauchy, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{f(z)\, dz}{z - x},$$

luego la relación anterior se reduce a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z)\, dz}{z - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(z)\, dz}{x - z}, \tag{1}$$

las integrales son tomadas respectivamente sobre (C) y (c) en el sentido positivo.

Consideremos la primer integral del segundo miembro de (1). Se tiene

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z\left(1 - \dfrac{x}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^n, \tag{2}$$

y como x es un punto interior al círculo C de radio $R = |z|$, resulta

$$\left|\frac{x}{z}\right| < 1,$$

[1] Ver J. C. Vignaux, *Sobre la sumabilidad de las series enteras divergentes con el método de Borel. Revista Matemática*, número 17, año 1926.

y la serie (2) es convergente, cualquiera sea z sobre C; además como converge *uniformemente*, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{z^{n+1}}\right)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

Poniendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

Para obtener el significado de los coeficientes a_n se nota que mediante n sucesivas derivaciones de la fórmula de Cauchy, se obtiene

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

y haciendo $x=0$ en ésta y dividiendo por $n!$,

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}=a_n.$$

De aquí resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \qquad \text{A)}$$

En cuanto a la segunda integral de (1), se tiene

$$\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{x}}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{x}\right)^n,$$

y puesto que

$$\left|\frac{z}{x}\right|<1,$$

la serie del segundo miembro, es uniformemente convergente cuando z está sobre c y x es un punto *exterior al mismo*. Se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{x-z}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{-n} \qquad \text{(B)}$$

donde

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z^{-n+1}} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Finalmente, teniendo presente (A) y (B), la igualdad (1) se puede escribir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{x^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

que constituye el desarrollo de una función en serie de Laurent.

En las fórmulas que dan los coeficientes a_n y b_n se puede integrar a lo largo de una curva cualquiera l cerrada, toda ella contenida en la corona circular y circundando la circunferencia (c); puesto que, las funciones integrandos son holomorfas en la corona.

Se podrá, por tanto, substituir los coeficientes a_n y b_n por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

igualdad cierta para todo valor de n positivo o negativo, con lo cual el desarrollo de Laurent toma la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n. \tag{4}$$

Además, la serie (4) es *uniformemente convergente* en la corona circular comprendida entre las circunferencias de radio $(R - \varepsilon)$ y $(r - \varepsilon_1)$ donde ε y ε_1 son números positivos arbitrariamente pequeños.

Si los centros de los círculos coinciden, con el punto $z = a$, se obtiene un desarrollo análogo al (4), pero ahora con respecto a las potencias positivas y negativas de $(x - a)$; es decir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (x - a)^n \tag{5}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{f(z)\,dz}{(z - a)^{n+1}}.$$

Sentado esto, demostraremos, en primer lugar, la sumación (B) absoluta y uniforme de la serie geométrica divergente, indispensable en lo que sigue.

4. Sea la serie divergente

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \qquad |z| \geq 1,$$

de la variable compleja $z = x + iy$. La serie asociada correspondiente es la serie de potencias

$$u(a, z) = 1 + \frac{az}{1!} + \frac{a^2z^2}{2!} + \ldots = e^{az}.$$

La suma generalizada de la serie (1) será

$$s(z) = \int_0^\infty e^{-a} u(az)\, da = \int_0^\infty e^{-a(1-z)}\, da,$$

la integral está tomada sobre el eje *real positivo*.

Con una integración directa se obtiene, poniendo

$$J = \int_0^t e^{-a(1-z)}\, da = \int_0^t e^{-a[1-(x+iy)]}\, da;$$

$$J = \frac{1}{1-(x+iy)} (1 - e^{-[1-(x+iy)]t}).$$

De aquí resulta

$$|J| < \left| \frac{e^{-[1-(x+iy)]t}}{1-(x+iy)} \right| \leq \frac{e^{-(1-x)t}}{1-x};$$

e indicando con m una constante positiva tal que

$$1 - x > m, \tag{α}$$

se tiene

$$|J| \leq \frac{e^{-mt}}{m},$$

es decir,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-mt}}{m} = 0,$$

en consecuencia

$$\int_0^\infty e^{-a(1-z)}\, da = \frac{1}{1-z}. \tag{2}$$

Luego, la condición necesaria y suficiente, para que la integral (2) sea convergente, es que *la parte real de z* sea inferior a la unidad. Simbólicamente

$$R(z) < 1. \tag{3}$$

Por tanto, si en el punto A de coordenadas (1,0), trazamos la tangente al círculo de radio *uno* (círculo de convergencia de la serie (1); la región de sumación (B) de la serie (1) es la parte del plano (D) cuyos

puntos satisfacen a la condición (3), es decir : $x < 1$; región formada por el semiplano que contiene el origen y limitado por dicha tangente (fig. 1).

En toda esta región, la serie (1) representa por su suma generalizada (2) la misma función $\frac{1}{1-z}$ que cuando el punto z pertenece al círculo de convergencia: es decir, se obtiene su prolongación analítica fuera de este dominio circular.

Consideremos ahora una región (D′) finita y limitada por el con-

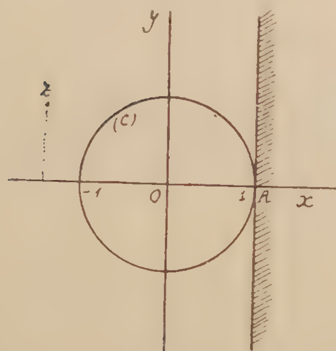


Figura 1

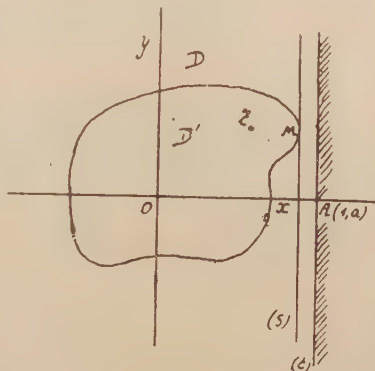


Figura 2

torno c de la región D (fig. 2). En esta área la serie (1) *es absoluta y uniformemente sumable* (B). En efecto, se tiene

$$\int_0^\infty \left| e^{-a(1-z)} \right| da = \int_0^\infty e^{-(1-x)} da;$$

y como el punto z pertenece al dominio interior de D′, se podrá determinar una constante $\delta > 0$, *independiente de z*, tal que

$$1 - x > \delta.$$

por tanto, se tiene

$$\int_0^\infty \left| e^{-a(1-z)} \right| da < \int_0^\infty e^{-a\delta} da = \frac{1}{\delta}, \qquad \text{(A)}$$

luego la integral del primer miembro existe. Además, como se tiene

$$u_.^{(\nu)}(az) = z^\nu + \frac{a}{1!} z^{\nu+1} + \frac{a^2}{2!} z^{\nu+2} + \ldots = z^\nu e^{az},$$

resulta para las integrales de Borel

$$\int_0^\infty e^{-a} \mid u^{(\nu)}(az) \mid da = \int_0^\infty \mid z^\nu e^{-a(1-z)} \mid da. \qquad \text{(B)}$$

El integrando se puede escribir

$$\mid z^\nu e^{-a(1-z)} \mid = \mid z^\nu \mid e^{-a(1-x)} < M^\nu e^{-a\delta},$$

donde M es una constante positiva, tal que $\mid z \mid < M$ en todo punto z del dominio (D′). Resulta

$$\int_0^\infty e^{-a} \mid u^{(\nu)}(az) \mid da < M^\nu \int_0^\infty e^{-a\delta} da = \frac{M^\nu}{\delta} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

por tanto las integrales (B) son convergentes.

De la existencia de las integrales (A) y (B) se concluye que la serie (1) es *absolutamente sumable* (B) en un dominio cualquiera D′ del campo de sumabilidad.

Por otra parte, la integral

$$\int_0^\infty e^{-a(1-z)} da,$$

es *uniformemente convergente* en (D′); pues se tiene

$$\left| \int_l^\infty e^{-a(1-z)} da \right| \leq \int_l^\infty \mid e^{-a(1-z)} \mid da < \int_l^\infty e^{-a\delta}$$

donde l es un número positivo; es decir

$$\left| \int_l^\infty e^{-a(1-z)} da \right| < \frac{e^{-l\delta}}{\delta}.$$

Dado el número $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede determinar, en correspondencia, un número $L > 0$ *independiente* de z, tal que

$$\frac{e^{-l\delta}}{\delta} < \varepsilon \qquad (\delta \text{ fijo})$$

para $l \geq L$. Por tanto, *la serie geométrica es uniformemente sumable* (B) en D′.

Se puede decir de todo esto, que la función

$$\Phi_n(z) = \int_0^n e^{-a(1-z)} da$$

donde n es un entero positivo, tiende uniformemente a su límite $\frac{1}{1-z}$, cuando n crece indefinidamente.

5. *Sumación de la serie de Laurent.* — Consideremos una función $f(z)$ holomorfa en el interior y sobre el contorno C de una área conexa (no simplemente) D que contiene en su interior el origen O. Sea (c) una circunferencia de círculo de centro O interior toda ella a la región D.

Si x es un punto cualquiera de la región limitada por las curvas C y c, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(z)\,dz}{x-z}; \tag{1}$$

las integrales son tomadas sobre C y c en el sentido positivo.

Considerando la primer integral de esta igualdad

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

se tiene

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z\left(1-\frac{x}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n. \tag{2}$$

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n,$$

donde z es un punto cualquiera del contorno C será sumable (B), si se tiene, según hemos visto

$$R\left(\frac{x}{z}\right) \leq 1-\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0), \tag{α}$$

es decir, cuando el punto x pertenece a una cierta región que designaremos con (A).

Multiplicando ambos miembros de la igualdad (2) por $f(z)$ e integrando a lo largo de C, resulta

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}. \tag{4}$$

La serie entera (3) es sumable (B). En efecto, la serie asociada correspondiente es

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n t^n}{n!},$$

y según la igualdad (4)

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z}\left(\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n! z^n}\right) dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z} \cdot e^{\frac{xt}{z}} dt$$

Por tanto, resulta

$$e^{-t} u(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z} e^{-t\left(1-\frac{x}{z}\right)} dt$$

de donde

$$\int_0^t e^{-t} u(t, x)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z}\left[\int_0^t e^{-t\left(1-\frac{x}{z}\right)} dt\right] dz. \qquad (5)$$

Teniendo presente que la relación (α) se cumple cuando z varía sobre c y x pertenece al dominio (A), la integral

$$\int_0^t e^{-t\left(1-\frac{x}{z}\right)} dt,$$

tiende *uniformemente* a su límite

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \frac{z}{z-x}$$

para $t \rightarrow \infty$. En consecuencia, el segundo miembro de (5) tiende hacia un límite finito para $t \rightarrow \infty$ y, por tanto, también el primero. Se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-t} u(t, x)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(z)\, dz}{z-x} = f_1(x).$$

La condición (α) nos permite determinar la región (A) de variación de x.

Pongamos

$$x = r \cdot e^{i\omega}, \qquad z = \rho e^{i\theta},$$

se tiene

$$\frac{x}{z} = \frac{r}{\rho} e^{i(\omega-\theta)} = \frac{r}{\rho}[\cos(\omega-\theta) + i \operatorname{sen}(\omega-\theta)],$$

luego resulta

$$R\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{r}{\rho}\cos(\omega-\theta) \leq 1-\varepsilon. \qquad (\alpha')$$

Supongamos el punto z fijo sobre el contorno c, y trazemos la recta (s) de la ecuación polar

$$r \cos(\omega - \theta) = \rho,$$

la cual resulta perpendicular en z a la recta que une el origen con este punto z. La condición (α') estará, por tanto, satisfecha de todos los puntos x que están en el semiplano que contiene el origen O y limitado por la recta (s) (fig. 3).

Cuando el punto z recorre toda la curva (C), la curva envolvente de las rectas (s), limita una área (A) tal que para todo punto x interior a la misma, la serie (3) resulta *sumable* (B). La curva (γ) que limita el dominio (A) es la *antipodaria* de la curva c respecto al punto O.

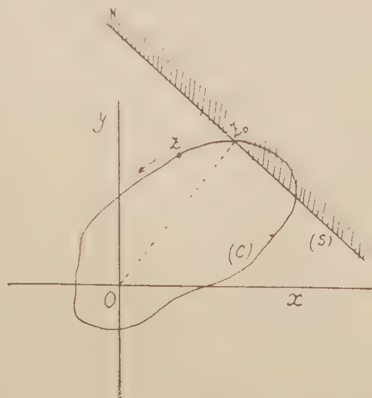


Figura 3

La serie (3) es, además, *absoluta y uniformemente sumable* (B) *en toda región interior a la región de sumación* (B). En efecto, sea M el módulo de $\frac{f(z)}{z}$ sobre el contorno c, se tiene

$$e^{-t} \,|\, u(t, x) \,| < \frac{M}{2\pi} \int_{(C)} e^{-t\varepsilon} \,|\, dz \,| = \mathrm{ML} e^{-t\varepsilon} \tag{6}$$

donde $\varepsilon > 0$ y L es la longitud de la curva (C). De aquí se concluye que la integral

$$\int_0^\infty e^{-t} \,|\, u(t, x) \,|\, dt,$$

es convergente. Del mismo modo se concluye que las integrales

$$\int_0^\infty e^{-t} \,|\, u^{(\nu)}(t, x) \,|\, dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

existen; por tanto, la serie (3) es *absolutamente sumable* (B) *en el dominio* (A') *interior al* (A).

La desigualdad (6) nos da, además,

$$\int_0^\infty e^{-t} \,|\, u(t, x) \,|\, dt < \mathrm{ML} \int_0^\infty e^{-t\varepsilon} dt;$$

luego

$$\left| \int_l^\infty e^{-t} u(t, x)\, dt \right| \leq \int_l^\infty e^{-t} \left| u(t, x) \right| dt < \frac{\text{ML}}{\varepsilon} e^{-\varepsilon l} \qquad (\varepsilon > \text{fijo}).$$

Dado el número $\eta > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede determinar en correspondencia un número N *independiente de x* tal que

$$\left| \int_l^\infty e^{-t} u(t, x)\, dt \right| < \eta$$

para $l \geq$ N. Por tanto, la serie (3) es *uniformemente sumable* (B) *en todo dominio* (A′) *interior al* A.

Consideremos, ahora, la segunda integral de la igualdad (1) y pongamos

$$f_2(x) = \int_{(c)} \frac{f(z)\, dz}{x - z},$$

donde x representa un punto x exterior al círculo c y z de la circunferencia c. Se tiene

$$\left| \frac{z}{x} \right| < 1,$$

luego, la serie

$$\frac{1}{x - z} = \frac{1}{x\left(1 - \frac{z}{x}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{x}\right)^n$$

es convergente. Además, la convergencia es uniforme en todo dominio exterior al círculo c.

La fórmula de Cauchy da entonces lugar al siguiente desarrollo :

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \tag{7}$$

donde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(z)\, dz}{z^{-n+1}}.$$

Este resultado nos dice que : *una función $f(z)$ holomorfa fuera de un círculo de centro en el origen $z = 0$, es desarrollable en una serie de potencias negativas de x.* Además, la convergencia es uniforme en toda región finita, exterior al círculo c.

Puesto que la serie (7) es convergente en el exterior del círculo c,

ella es también *sumable* (B) en dicho campo [1] con la misma suma $f_2(x)$.

Finalmente, sumando las series (3) y (4), se obtiene, según la relación (1),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{x^n} \tag{8}$$

la serie de Laurent, correspondiente a la función $f(x)$; pero con validez, en un campo limitado por la circunferencia c y la curva (γ) antipodaria del contorno C respecto al origen O. A esta región que contiene, evidentemente, la corona de convergencia de la serie dada la denominaremos *dominio* (L).

Este dominio (L) está formado por la región (A) de sumabilidad de la serie (3) menos el círculo c de centro en O.

En toda área interior al *dominio* (L) la serie (8) *es absoluta y uniformemente sumable* (B).

En las fórmulas que dan los coeficientes a_n y b_n de la serie (8), la integración se puede también efectuar a lo largo de un camino único, formado por una curva l cerrada, toda ella contenida en la región limitada por la circunferencia c y el contorno C y circundando la primera: puesto que las funciones integrandos son funciones holomorfas en dicho dominio.

Se podrá, en consecuencia, substituir los coeficientes a_n y b_n por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

donde n es un número entero positivo o negativo.

El desarrollo de Laurent tomará la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n x^n,$$

igualdad que se cumple en el *dominio* L.

Corona poligonal de sumabilidad. — Consideremos una función $f(z)$ holomorfa, en todo el plano complejo, excepto en los puntos de un cierto círculo (c) de centro en O, y con un número finito de singularidades.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_i$, estos puntos singulares de $f(z)$ y efectuemos la

[1] Ver J. C. VIGNAUX, *Sobre las series divergentes sumables*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, 1926.

siguiente construcción : trazando las rectas $s_1, s_2, ..., s_i$, respectivamente perpendiculares a $Oz_1, Oz_2, ..., Oz_i$ en dichos puntos y suprimiendo la porción de plano que no contiene el origen O, limitado por las rectas $s_1, ..., s_n$, se tendrá formado así un dominio cerrado o abierto limitado por el polígono así formado y el círculo c, que denominaremos *corona poligonal de sumabilidad* (B) (fig. 4).

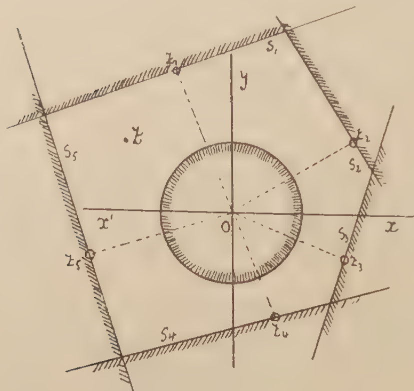


Figura 4

Llamaremos *corona poligonal de sumabilidad* (B) *la región del plano* (finito o no) *que contiene el origen* O, *limitada por las perpendiculares trazadas en los puntos singulares respectivamente a las rectas que unen dichos puntos con el origen y un cierto círculo (c) de centro en* O.

En consecuencia, la serie de Laurent de la función $f(z)$ es sumable (B) en la corona poligonal de sumabilidad (B), y la sumación es absoluta y uniforme en toda región finita interior a dicha corona poligonal.

En el caso más general que los puntos singulares de $f(z)$ formen uno curva cerrada C, el polígono de sumabilidad coincide con la región que hemos denominado *dominio* (L).

Además, resulta evidente que el *dominio* (L) o la *corona poligonal de sumabilidad* contiene totalmente en su interior la corona circular de convergencia de la serie de Laurent.

LA INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA

SOBRE

LA ENERGÍA FÍSICA DEL HOMBRE

ESTUDIO HECHO A BASE DE LOS JUEGOS OLÍMPICOS DE AMBERES 1920 Y PARÍS 1924

Por GUILLERMO HOXMARK

Probablemente todos poseen una somera y vaga idea respecto a la influencia que desarrolla el clima sobre la energía física de la raza humana.

Varios hombres de ciencia han establecido zonas de energía y actividad humanas y también de civilización, entre ellos especialmente el doctor Ellsworth Huntington, de la Universidad de Yale, Estados Unidos (Ellsworth Huntington. *Civilization and Climate,* Yale University Press, 1915).

La base de estas investigaciones ha sido las relaciones entre las condiciones climatéricas y diversas manifestaciones humanas, como el trabajo en las fábricas, las clasificaciones obtenidas por los escolares, la salud pública y las actividades comerciales.

Se pueden emplear muchos otros factores para establecer relaciones análogas entre el clima y la energía humana sobre una base científica y uno de ellos es los resultados alcanzados en los Juegos olímpicos Internacionales exteriorizados en los puntos ganados por los distintos países.

La cantidad de puntos ofrece una excelente base para efectuar una investigación del efecto del clima sobre la constitución y actividad del hombre.

Para obtener valores fácilmente comparables a fin de calcular los posibles efectos del clima, el primer paso consistió en dividir la can-

tidad de habitantes (censo de 1920) por el número de puntos obtenidos respectivamente en Amberes y París.

El resultado de esta operación demuestra cuántos habitantes correspondían por cada punto en las naciones que participaran en los juegos.

CUADRO I

Resultados de los Juegos olímpicos internacionales en Amberes (Bélgica), 1920

País	A Puntos ganados	B Miles de habitantes por punto	C Números indicadores	D Temperatura media anual °C
1. Noruega	66.0	40	1.0	3.8
2. Finlandia	74.0	46	1.1	3.1
3. Suecia	121.5	49	1.2	5.1
4. Dinamarca	28.0	117	2.9	7.2
5. Luxemburgo	2.0	135	3.4	8.9
6. Bélgica	40.0	192	4.8	9.1
7. Suiza	17.0	229	5.7	8.6
8. Estonia	7.0	250	6.2	4.4
9. U. Sudafricana	21.0	330	8.2	16.4
10. Holanda	18.0	391	9.7	8.7
11. Canadá	18.0	488	12.2	4.6
12. Gran Bretaña	87.0	544	13.6	9.6
13. Estados Unidos	201.5	585	14.6	10.6
14. Francia	63.0	622	15.5	11.7
15. Italia	54.0	719	17.9	15.2
16. Australia	5.0	1.087	27.1	17.2
17. Nueva Zelandia	1.0	1.820	32.9	12.7
18. Grecia	2.0	3.500	87.3	16.3
19. Brasil	6.0	5.106	127.3	21.7
20. España	4.0	5.337	133.1	13.6
21. Checoeslovaquia	2.0	6.798	169.5	8.3
22. Japón	5.0	15.401	633.5	11.6

Este resultado aparece en la columna B en los cuadros I y II.

En estos cuadros las naciones no han sido puestas en el orden de la cantidad de puntos ganados (columna A), pero de acuerdo al coeficiente de habitantes necesario para ganar un punto.

CUADRO II

Resultados de los Juegos olímpicos internacionales en París (Francia), 1924

País	A Puntos ganados	B Miles de habitantes por punto	C Números indicadores	D Temperatura media anual °C
1. Noruega	31.25	85	1.0	3.8
2. Finlandia	34.00	99	1.2	3.1
3. Suecia	44.05	134	1.6	5.1
4. Uruguay	10.00	156	1.9	16.4
5. Dinamarca	17.00	193	2.3	7.2
6. Estonia	7.00	250	3.0	4.4
7. Holanda	19.00	370	4.4	8.7
8. Bélgica	17.75	433	5.1	9.1
9. Francia	64.00	613	7.2	11.7
10. Argentina	13.00	622	7.4	13.5
11. Hungría	8.00	980	11.6	9.7
12. Gran Bretaña	41.25	1.147	13.5	9.6
13. Estados Unidos	94.00	1.254	14.8	10.6
14. Austria	5.00	1.295	15.3	8.1
15. Suiza	29.05	1.318	15.6	8.6
16. Italia	25.75	1.508	17.8	15.2
17. Checoeslovaquia	8.00	1.699	20.1	8.3
18. Australia	3.00	1.812	21.4	17.2
19. Haití	1.00	2.045	24.2	24.7
20. Portugal	2.00	3.200	37.8	14.8
21. Yugoeslavia	4.00	4.250	50.2	10.7
22. Rumania	4.00	4.500	53.1	9.3
23. U. Sudafricana	1.00	6.929	81.8	16.4
24. España	3.00	7.116	84.0	13.6
25. Egipto	0.75	17.849	210.8	20.7
26. Polonia	0.25	108.640	1282.9	7.4

Comparando los dos cuadros no es difícil observar que los métodos aplicados para calcular los puntos deben haber sido diferentes en Amberes y París. Fué indispensable calcular los números indicadores que aparecen en la columna C. Para este fin se determinó el menor número de habitantes por punto, caso ocurrido a Noruega, tanto en Amberes como en París, fué establecido en 1 y los demás países fueron clasificados conforme a esta base. La capacidad de las naciones decrece naturalmente con el aumento en los números indicadores.

La temperatura media de cada país en grados celsius se encuentra en la columna D de los cuadros I y II.

CUADRO III

Promedios de los resultados de los Juegos olímpicos de Amberes y de París, y temperatura media anual en centígrados, de diez y seis naciones.

País	Promedio de los números indicadores	Temperatura media anual °C
1. Noruega	1.00	3.8
2. Finlandia	1.14	3.1
3. Suecia	1.40	5.1
4. Dinamarca	2.60	7.2
5. Estonia	4.59	4.4
6. Bélgica	4.95	9.1
7. Holanda	7.05	8.7
8. Suiza	10.63	8.6
9. Francia	11.37	11.7
10. Gran Bretaña	13.55	9.6
11. Estados Unidos	14.70	10.6
12. Italia	17.86	15.2
13. Australia	24.26	17.2
14. U. Sudafricana	45.02	16.4
15. Checoeslovaquia	94.80	8.3
16. España	108.56	13.6

En el cuadro III se hallan los resultados medios de Amberes de 1920 y de París de 1924 para las 16 naciones que ganaron puntos en ambos juegos.

El gráfico de la figura 1 demuestra muy bien las relaciones entre la temperatura y los puntos alcanzados, siendo evidente que una baja temperatura y un número indicador bajo son signos de superioridad atlética en general.

La correlación entre los resultados de 1920 y 1924 son notables. Sería interesante estudiar los resultados de los futuros juegos olímpicos para ver si los puntos en el diagrama figura 1 se diseminarán o se concentrarán, como debe ocurrir si la temperatura realmente es el factor dominante en la producción de energía física.

El profesor A. V. Hill *(The Physiological Basis of athletic Record «Nature»*, págs. 544-548, nº 2919, vol. 116, October 10, 1925, London) ha encontrado que la cantidad de oxígeno empleado por el cuerpo humano es una medida de la energía gastada.

Un litro de oxígeno consumado representa cerca de 5 calorías de energía empleada, lo que es suficiente para calentar 5 litros de agua a 1 °C. Expresado en términos de energía mecánica, es suficiente para levantar el peso de 1000 kilos hasta $2^{m}10$ de altura.

Se ha establecido que el oxígeno no es indispensable durante los momentos de un esfuerzo. Los músculos tienen un mecanismo depen-

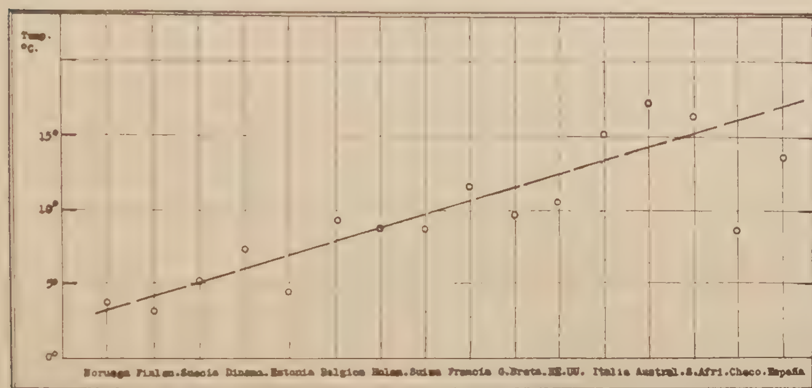


Fig. 1. — Relación entre los promedios de los números índices de los Juegos olímpicos de 1920 y 1924 y la temperatura media anual de cada país

diente de la formación del ácido láctico, por medio del cual se puede retardar una gran parte del proceso de oxidación hasta después de la prueba. El proceso de recuperar después de un esfuerzo físico requiere esta oxidación retardada, siendo tan importante para los músculos como la recarga de un acumulador eléctrico.

El grado en que el cuerpo puede *hacer deudas* a este respecto es limitado. Cuando *se debe* alrededor de 15 litros de oxígeno, el cuerpo se halla incapaz de más esfuerzos: esta completamente agotado.

Un hombre puede hacer un esfuerzo muy superior a su reserva de oxígeno. Este esfuerzo necesita oxígeno después y el oxígeno total que se precisa por minuto para seguir el ejercicio puede ser medido. Esto es lo que se llama el *requisito de oxígeno,* que caracteriza el esfuerzo.

Los experimentos han demostrado (fig. 2) que el *requisito de oxíge-*

no varía considerablemente con la velocidad y aumenta en mayor proporción que ésta llegando al doble, triple y aun más en relación a la velocidad: así que alta velocidad y esfuerzos intensos son muy desgastadores.

En la figura 2 se hallan expuestos gráficamente algunos resultados

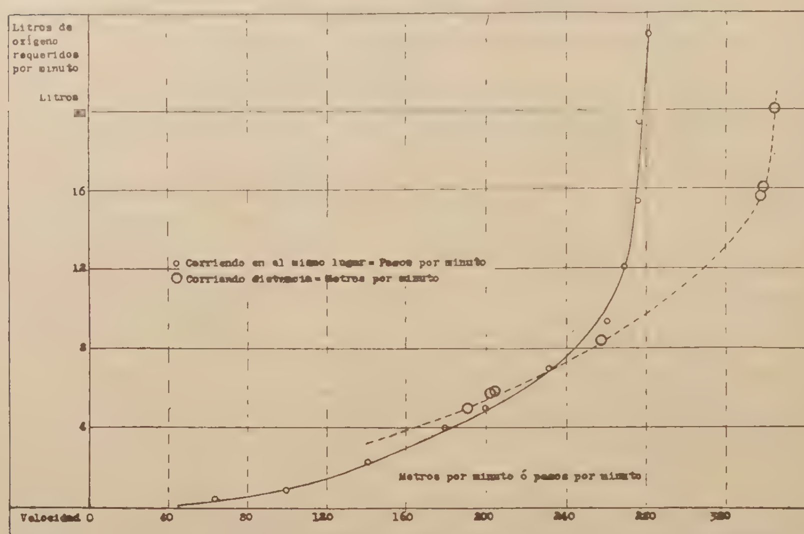


Fig. 2. — Observaciones del oxígeno requerido por minuto para atletas corriendo en el mismo lugar y corriendo distancias de varias velocidades. Corriendo se ha tomado como base metros por minuto y corriendo en el mismo lugar pasos por minuto.

que demuestran perfectamente el aumento del *requisito de oxígeno* simultáneamente con el aumento de la velocidad.

Los atletas de los países fríos deben su superioridad atlética probablemente a la mayor aptitud de sus cuerpos para efectuar esfuerzos violentos con un gasto limitado de oxígeno.

Esta condición especial es evidentemente el resultado de las bajas temperaturas y el producto de la aclimatación de muchas generaciones.

DETERMINACIÓN DE LONGITUDES GEOGRÁFICAS

MEDIANTE EL EMPLEO DE LA RADIOTELEGRAFÍA

POR EL INGENIERO CIVIL JOSÉ ARAMBURO
Ex jefe de Comisión de estudios de los Ferrocarriles del Estado. Ingeniero en la Inspección de obras del Ferrocarril provincial de Buenos Aires

—

Al doctor Enrique S. Pérez, estadista.

SEGUNDA PARTE

Críticas y réplicas

Habla sólo de lo que entiendas, y con lenguaje honesto y clarísimo.

Si ocultas algún pliegue de tus pensamientos, podrá creerse que quieres disfrazar tu inseguridad o, en el mejor de los casos, que buscas mantener una supremacía intelectual que es sólo egoísmo y soberbia.

Débese esta *Segunda parte* de nuestra monografía publicada en los *Anales* (t. CI, págs. 11 y siguientes), a las comunicaciones que nos han dirigido algunos profesionales que han leído y analizado minuciosamente nuestra *Primera parte.*

En general, en estas cartas se nos hacen algunas observaciones de poca importancia, junto con la frase amable de congratulación; pero como en una se formulan objeciones fundamentales en lo que concierne a la combinación de los resultados de nuestras observaciones astronómicas, hemos creído necesario exponer ahora y con la extensión debida, nuestro punto de vista sobre cada una de las cuestiones planteadas.

En esta monografía perseveramos en nuestra norma de conducta de tratar impersonalmente las controversias doctrinarias. La crítica no nos molesta: nos agrada; y sólo ante la que nos ha parecido ex-

cesiva hemos empleado la penetración que conviene a la defensa de ideas profesadas tras maduro examen.

En esta *Segunda parte* completamos el texto de la *Primera* con algunas indicaciones necesarias sobre la teoría que nos guió. Llegamos así a un conjunto de exposición y crítica que cobra un valor que nuestra sola pluma no hubiera alcanzado a darle; y como se trata de un tema controvertido, aunque de corto alcance, esperamos que logrará interesar a los especialistas. Por si así fuere y nos resultaran adversas las opiniones de otros colegas, declaramos que no reanudaríamos la discusión, porque consideramos que nada importante podríamos agregar en apoyo de los procedimientos aplicados en nuestro trabajo geodésico.

Crítica

RESUMEN DE LAS OBJECIONES HECHAS A LA PRIMERA PARTE

I. *Prioridad de aplicación.* — Respecto de la prioridad en la aplicación de las radiocomunicaciones para comparar los tiempos locales en la determinación de longitudes geográficas en nuestro país, el autor debió mencionar la campaña realizada en 1920-1921 por el Ministerio de marina en la costa patagónica, en la que se determinaron doce longitudes radiotelegráficamente, y que estuvo a cargo del teniente de navío Luisoni con la colaboración del geodesta Jansen.

Los resultados de estos trabajos aparecieron en *Anales hidrográficos,* tomo V, páginas 29 a 130, Buenos Aires, año 1923.

Ensayos no del todo satisfactorios y que no han sido publicados aún, fueron realizados en 1911 por el Instituto geográfico militar en la determinación de la diferencia de longitud Buenos Aires-Montevideo.

II. *Ocultaciones debajo del horizonte.* — Las disquisiciones de la página 20, relativas a la recepción de las señales radiotelegráficas, podrían haberse dejado de lado, lo mismo que las del tercer párrafo de la página 23, ya que el llamado innecesario « aprendizaje teórico » hubiera justamente evitado el esperar inútilmente en un dado lugar, una ocultación que debía producirse debajo del horizonte.

III. *Equipo del geodesta Jansen.* — En la noticia que del equipo del geodesta Jansen da el autor en el apéndice de su obra, no ha mencionado datos que lo caracterizan fundamentalmente. Así, el autoregistro de las señales radiotelegráficas de la Dársena, que significa el progreso más grande alcanzado en las determinaciones radiográficas de longitud.

IV. *Correcciones al cálculo de α Virginis, según observaciones del 6 de junio de 1923.* — Tratándose de operaciones con instrumento de nonius, basta el empleo de tablas logarítmicas a cinco decimales.

Para el cálculo de las refracciones resulta cómodo el empleo de nomogramas.

Desde que el instrumento empleado sólo aprecia hasta 10″, en la refracción bastará con tomar en cuenta el segundo. El empleo de más cifras que las que los datos comportan como fidedignas, debe evitarse.

Aunque el promedio que el crítico ha obtenido para ΔT, al rehacer los cálculos, difiere en 0^s3 del promedio que el autor ha obtenido con más cifras, no hay duda que esta diferencia ha de ser del orden de los errores de observación, dado el poder del anteojo, el alcance de los nonius y la forma indirecta de ligar astro y reloj.

El crítico compara sus series C. I. y C. D., y obtiene los siguientes resultados:

C. I.		C. D.	
	1^h50^m		
4^s2		5^s6	
3.5		5.7	1^s23
3.4		5.7	16.40
3.1		5.3	28.70
2.2		6.4	4^s51
16^s4		28^s7	

Sumando y dividiendo por diez, se tiene 4,51 como promedio general. Restando y dividiendo por diez, da 1,23 como semi-diferencia entre los promedios de las dos series.

Dada la regularidad de los resultados, dentro de cada serie, la diferencia entre los dos promedios debe atribuirse al error de índice del círculo zenital; y aplicando a los resultados individuales la corrección 1^s2 para C. I. y — 1^s2 para C. D., se obtiene el cuadro siguiente:

	v	vv
5,4	0,9	0,81
4,7	0,2	0,04
4,6	0,1	0,01
4,3	— 0,2	0,04
3,5	— 1,0	1,00
4,4	— 0,1	0,01
4,5	0,0	0,00
4,5	0,0	0,00
4,1	— 0,4	0,16
5,2	0,7	0,49
45,2	1,9	$[vv] = 2,56$
4^s5	— 1,7	

Según esto, el error probable del promedio es

$$r_0 = 0{,}675 \sqrt{\frac{2{,}56}{10 \times 9}} = \pm 0^s10;$$

el error probable de una observación aislada es

$$r = 0{,}675 \sqrt{\frac{2{,}56}{9}} = \pm 0^s36$$

(hay seis valores residuales menores y cuatro mayores); y según el criterio de Chauvenet,

$$V = 2{,}9\, r = 1{,}04,$$

es el mayor valor que se puede aceptar para un error residual.

Las observaciones son, pues, todas aceptables; y dado el corto tiempo en que han sido hechas y su error probable peqneño, ellas ponen de manifiesto la prolijidad de los operadores.

El autor no ha hecho lecturas de nivel zenital, limitándose a centrar la burbuja, con lo cual esa lectura queda reducida a cero. El crítico sólo procede así cuando, ocasionalmente, tiene que observar con el teodolito Zeiss, modelo II, que no tiene graduación en el nivel pero que, con un juego de prismas, permite centrar la burbuja con facilidad.

Cuando opera con el Breithaupt de nonius o con el Bamberg de microscopios, trata de que la burbuja se mantenga cerca del centro, pero anota las lecturas correspondientes; y la primera corrección que aplica a la lectura zenital es la de nivel, de acuerdo con lo que explica en un folleto que tuvo la gentileza de enviar al autor.

V. *Opiniones sobre el método de ocultación de estrellas por la Luna, el de Gauss y otros.* — El crítico está de acuerdo con el autor sobre la poca ventaja que ofrece la observación de ocultación de estrellas por la Luna. Y agrega que trabajar tanto para la predicción y otro tanto, o más, después, para la reducción, para obtener *un solo* resultado, es algo que nunca lo ha entusiasmado; y piensa que no es en un curso de Geodesia donde debe figurar ese método, pues en Geodesia la longitud se determina exclusivamente por el procedimiento telegráfico, con o sin conductor metálico.

Tampoco le entusiasman los métodos combinados (Gauss, Stechert, Díaz Covarrubias y otros) a los cuales dedicó bastante tiempo en años ya lejanos.

El inconveniente que les ve a estos métodos es que la confección

de los programas es laboriosa; si por cualquier causa falla algún elemento en la observación, toda la operación queda perdida; y, en general, después de no poco trabajo, no se obtienen resultados sino en número limitado, lo que no pasa con los procedimientos directos, donde se determina una cosa cada vez.

Para el tiempo, si no hay que pensar en el instrumento de pasos, las distancias zenitales cerca del vertical primario dan muy buenos resultados, como el autor lo ha podido comprobar experimentalmente.

VI. *Eliminación de observaciones inobjetables (crítica fundamental).* — Al final de la página 17 dice el autor: « Se obtenían, así, cada noche, cuarenta valores de la corrección cronométrica y se eliminaban los que resultaban defectuosos. »

Si se relaciona este procedimiento con el seguido efectivamente en la combinacion de los resultados de las distintas noches, se advierte una grave anomalía que no es justificable. Criterios para desechar resultados de observaciones, hay varios y todos objetables. Están, unos, fundados sobre la medida de precision de las observaciones y admiten que pueda desecharse el resultado de una medición que se aparte del promedio en más del triple del error medio. La probabilidad de una tal observación es apenas 0,0027, es decir que se presentará una vez en un conjunto de 370. El criterio de Peirce, aparatosamente fundado, no es más valedero que el anterior.

Los criterios habitualmente empleados están fundados sobre la teoría de la probabilidad y deben ser usados con suma discreción.

Sobre todos ellos, está el siguiente: no debe desecharse el resultado de una medición si el observador no la declaró deficiente en el mismo instante de tomarla.

En su trabajo, el autor ha procedido arbitrariamente al desechar, en gran proporción, resultados de mediciones inobjetables.

Aún más: al combinar los resultados de observaciones tomadas en las dos posiciones del instrumento (C. I. y C. D.) el autor ha elegido invariablemente, salvo dos excepciones afortunadas, un número de observaciones en una posición y las ha combinado con un número diverso de observaciones correspondientes a la otra posición, perdiendo de esta manera una de las preciosas ventajas del método.

Igualmente injustificable es el procedimiento seguido por el autor al seleccionar arbitrariamente los valores con que en la página 21 ha calculado el error probable de observación. Así mismo, en la adopción de valores correspondientes a los tiempos de recepción de las señales, página 75.

VII. *Error probable del resultado final.* — El resultado definitivo de la longitud está caracterizado por un error probable que no corresponde a la realidad, ya que el autor no lo ha depurado de los errores constantes inherentes al método usado. Con la salvedad que implican las consideraciones precedentes, el error probable asignado, representaría el error probable interno del resultado alcanzado.

Réplica (¹)

I. El autor ignoraba los antecedentes mencionados.

Ciertamente, la campaña realizada en 1920-1921 por el teniente de navío Luisoni y el geodesta Jansen, es anterior a la nuestra. Se trata de una contribución interesantísima, pero nos parece que podemos ratificarnos en lo dicho en la primera página de la *Primera parte* : « La primera y formal aplicación de la radiotelegrafía en el país, destinada a la determinación de una longitud geográfica con fines técnicos, fué llevada a cabo el 24 de abril de 1923. » En efecto, nuestra campaña no tuvo como finalidad la determinación aislada de una o varias longitudes geográficas, sino su aplicación inmediata a un problema de ingeniería ferroviaria, a un problema en cuya discusión técnica jugaban importante papel los errores probables de las determinaciones astronómicas. Este mayor alcance distingue nítidamente a nuestro trabajo y es, desde este punto de vista (que no tenemos interés en mantener), que lo señalamos como el primero.

II. El autor ha vuelto a leer el tercer párrafo de la página 23, *Primera parte*, y se ha reído de su viciosa construcción. Pero es extraño que el comentarista no haya caído en la cuenta de que se trataba de un *calamo currente*, pues el autor no quiso referirse al fenómeno mismo, sino al cálculo de su predicción. Para desvanecer la sospecha de que hayamos podido esperar, en un lugar determinado, una ocultación que debía producirse debajo del horizonte, manifestamos que obran en nuestro poder los cálculos de la predicción de unas veinte ocultaciones correspondientes a fines del año 1922 y principios del 1923 (de noviembre a abril).

III. El autor sufrió un olvido imperdonable cuando, al referirse al equipo del geodesta Jansen, dejó de mencionar el auto registro de las señales radiotelegráficas.

(¹) En esta Réplica, el número de orden de cada tema corresponde al de la crítica precedente.

En el número VI, capítulo D, damos la nómina completa de aquel equipo y de otros.

IV. Hemos revisado los cálculos del crítico relativos a las observaciones de Spica, del 6 de junio de 1923 y, sin que ello importe dar por necesario o por justificado el empleo del criterio de Peirce o el de Chauvenet, encontramos, con los datos del cuadro VII limitados al décimo de segundo, que debería eliminarse la observación quinta cuyo error residuo, 1^s1, sobrepasa al máximo valor residual aceptable: 0^s, 92. Llegamos, así, a un valor de

$$\Delta T = -4^m 54^s 86 \pm 0^s 06 \text{ a } 11^h 48^m \text{ (}^1\text{)}.$$

en lugar de $4^m 54^s 83$, como figura en el cuadro VII.

Por encima de la teoría de la probabilidad y de los criterios de eliminación aparatosamente fundados, como dice otro de los comentaristas, está el criterio que el observador se forma, dado el objeto de su trabajo, las condiciones de su ejecución y la precisión *económica* que le exige el problema técnico cuya solución busca con tales o cuales procedimientos impuestos por las circunstancias.

Con toda claridad manifestó el autor que asignaba escaso valor científico a su publicación; con decir esto, entendió que se libraba de justificar, en cada caso, la eliminación de resultados individuales. La forma indirecta de ligar el astro con el reloj, a la que se ha aludido, marca a nuestras observaciones un lugar modesto y es hacerles mucho favor el elevarlas al solemne estrado de los cuadrados mínimos.

Creyóse, en cambio, que cabía la determinación del error probable de la longitud geográfica, operando con los resultados individuales finales, lo que ya es otra cosa.

Dentro de este mismo orden de ideas, el autor no se aventuró mayormente en el examen del error probable de observación; la planilla de la página 21 podría, en realidad, alargarse mucho más, sin detrimento para el resultado que allí figura: la planilla es, simplemente, un esbozo que tiende a dar la impresión de que si los operadores hubieran contado con instalación cronográfica, el orden de precisión de los resultados individuales habría sido el décimo de segundo y aun menos.

Así, por ejemplo, se permite señalar las observaciones del cuadro XXV que, a pesar de la técnica grosera utilizada, conduce a un error probable de 0"04 si no se desprecia ningún resultado individual. De otros cuadros podría decirse más o menos lo mismo.

(1) Véase el anexo a continuación de esta réplica.

En resumen: procedimos honestamente y no nos pareció que lo alcanzado con medios primitivos mereciera pulirse con fino instrumento matemático.

Anexo (véase la referencia en la réplica anterior).

Del cuadro VII de la *Primera parte* :

	C. I.	C. D.
	— $4^m54^s.10$	— $4^m55^s.70$
	4.00	6.10
	3.70	5.80
	3.40	5.70
	2.40	6.30
	$17^s.60$	$29^s.60$
Promedios :	— $4^m53^s.52$	— $4^m55^s.92$

Promedio general : — $4^m54^s.72$

$$\frac{\Sigma\,(\mathrm{C.\,I.}) - \Sigma\,(\mathrm{C.\,D.})}{10} = +\,1^s20.$$

Valores corregidos del error de índice :

	v	vv
— $4^m55^s.3$	0,6	0,36
5.2	0,5	0,25
4.9	0,2	0.04
4.6	— 0,1	0,01
3.6	— 1.1	1.21
4.5	— 0,2	0,04
4.9	0,2	0,04
4.6	— 0,1	0,01
4.5	— 0,2	0,04
5.1	0,4	0,16
— $4^m54^s.7$	1,9	$[vv]$ = 2.16
	— 1,7	

Error de una observación aislada :

$m = 10$

$\mu = 1$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m - \mu}}$$

luego

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2,16}{9}} = \pm\,0^s49.$$

Criterio de Peirce (tabla X, en Chauvenet, tomo II) :

$$\chi^2 = 3{,}526; \qquad \chi \sim 1{,}88$$

luego

$$\chi\varepsilon = 1{,}88 \times 0{,}49 = 0^s92.$$

Por lo tanto, se elimina la observación quinta y queda :

C. I.	C. D.
— 4ᵐ54ˢ10	— 4ᵐ55ˢ70
4.00	6.10
3.70	5.80
3.40	5.70
—	6.30
— 4ᵐ53ˢ80	— 4ᵐ55ˢ92

Semi-diferencia : 1ˢ06

Valores corregidos :

	v	vv
— 4ᵐ55ˢ16	0,30	0,0900
5.06	0,20	0,0400
4.76	— 0,10	0,0100
4.46	— 0,40	0,1600
4.64	— 0,22	0,0484
5.04	0,18	0,0324
4.74	— 0,12	0,0144
4.64	— 0,22	0,0484
5.24	0,38	0,1444
43ˢ74		$[vv] = 0{,}5880$

— 4ᵐ54ˢ86 ± 0ˢ06

Error medio probable :

$$\varepsilon_u = 0.6745 \sqrt{\frac{0.5880}{9 \times 8}} = \pm 0^s06.$$

En el cuadro VII, con el procedimiento allí usado, resultó :

$$— 4^m54^s83.$$

Objeciones a nuestra réplica IV. — La réplica precedente fué refutada por el mismo crítico que la motivó, a fin de dejar perfectamente sentado que fué, precisamente, el carácter de *operaciones en campaña* de nuestro trabajo, lo que le indujo a ocuparse de él en la forma que lo hizo.

El crítico ha trabajado con las comodidades que ofrecen las instalaciones permanentes de los observatorios y con las incomodidades inherentes a las instalaciones temporarias en campaña; y considera que tiene mucho más mérito un resultado mediocre en el segundo caso que uno mejor en el primero, dadas las condiciones distintas en que uno y otro se obtienen.

Respecto de la aplicación de los cuadrados mínimos a la discusión de los resultados obtenidos por el autor, la considera perfectamente justificada. A pesar de la modestia con que el autor los califica, el examen comparativo de los valores obtenidos hace ver que se trata de observaciones prolijas, ninguna de las cuales deberá ser desechada *prima facie*, si es que en el registro no hay alguna indicación que la sindique de sospechosa.

Continúa diciendo que el método de los cuadrados mínimos es muy racional, desde que en casos como el nuestro todo él se basa en el error probable $r = 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ de una observación aislada; y este error probable tiene cada vez un valor diferente, puesto que él depende del método, del instrumento, del operador y de las condiciones en las cuales se ha operado.

En cuanto al criterio para el rechazo o la retención de observaciones dudosas, el crítico recuerda que ya Airy ponía en duda la posibilidad de establecerlo basándole en el cálculo de probabilidades. Por otra parte, el doctor Gould, que después dirigió con tanto acierto nuestro observatorio nacional de Córdoba, en un informe fechado el 15 de noviembre de 1854 y publicado en la página 131* de la memoria para 1854 de la U. S. Coast an Geodetic Survey, dice: « ...In the criticism of various series which I had to do in the study of the telegraphie results of the Coast Survey I have applied Peirce's criterion *with signal advantage* and have been led to the preparation of tables for facilitating its use... »

El crítico se atiene a esta última opinión; pero, en casos como el nuestro, en vez del criterio de Peirce, recurre al de Chauvenet, de aplicación mucho más fácil. Más: aún en este caso, si da con valores residuales un poco afuera del límite calculado y nota que el exceso de esta v sobre aquel límite, dividido por el número de observaciones, le da un valor que alteraría el promedio en una cantidad cuya magnitud es del orden de los errores de observación, no tiene reparo en conservar la observación correspondiente.

A este propósito, el crítico recuerda que hace más de treinta años,

explicando a uno de sus ayudantes la forma de aplicar el método de los cuadrados mínimos a la discusión de resultados, le dijo el ayudante: « Entonces ¿ el método sirve para declarar buena cualquier observación? No — le contestó — lo que hace es substituir un criterio científico a uno arbitrario [1].»

V. Las opiniones del comentarista acerca de los métodos de Stechert, Gauss y otros, no las comparte completamente el autor.

Aun cuando se trata de una cuestión que queda al margen de lo que aquí se ventila, diremos, brevemente, que los métodos de combinación tienen el inconveniente que señala el crítico ; pero este inconveniente poco significa ante las innegables ventajas que, por sabidas, no nos entretendremos en enumerar.

VI. *Réplica fundamental.*

Dícese que: « *No debe desecharse el resultado de una medición si el observador no la declaró deficiente en el mismo instante de tomarla.* »

Si el observador declara deficiente una observación en cuanto acaba de realizarla, es de suponer que la rechazará inmediatamente y que no hará cálculo alguno con ella. Lo asombroso sería que la aceptara si, por casualidad, no discrepara de las demás, libres de mancha. Llegamos, así, a esto : *No debe desecharse el resultado de ninguna medición.*

Ésta podría ser, acaso, la inflexible regla de un geodesta de primera fuerza o de un astrónomo que « finit par faire corps avec son instrument habituel, de même qu' un mécanicien de chemin de fer finit par épouser sa machine » (Bouasse : *Astronomie théor et prat.,* pág. 144). Pero pretender que un ingeniero de campaña, sólo ha de eliminar los resultados de observaciones tildadas de defectuosas al tomarlas, es contrario al buen sentido, es caer en una obediencia ciega que repugna cabalmente al matemático, pero que es instintiva en el maquinista que, sin discusión, obedece las señales colocadas en la vía férrea.

El astrónomo que, instalado en un ambiente cómodo y tranquilo, efectúa determinaciones de tiempo teniendo el manipulador del cronógrafo bajo su mano, consigue acomodarse al más riguroso criterio tanto en lo que respecta a la precisión de las observaciones como a los métodos de reducción.

Pero a un ingeniero que trabaja con un teodolito en un descampado, al lado de una vía férrea, combatiendo con los mosquitos o defendiéndose de las inclemencias del tiempo ; que debe limpiar los lentes empañados por la humedad ; que trabaja con iluminación deficiente ;

[1] El criterio del crítico y el del autor son opuestos.

que no tiene cronógrafo ni siquiera cronómetro que le permita observar a ojo y oído; que depende, por lo tanto, de otra persona, de un cronometrista que también sufre las mismas incomodidades, ¿ podrá exigírsele que se someta a un rigor que, al fin de cuentas, escapará a la *precisión económica* del problema técnico ?

Bien claramente se dejó establecido en la monografía anterior que sólo atribuíamos a la misma muy escaso valor científico.

Por todo esto, dejamos sentado con toda la convicción que nos ha dado la experiencia, que en nuestro trabajo no era pertinente utilizar el instrumento matemático a ciegas y que era lógico someter los resultados a una *interpretación personal,* propia del objeto, del procedimiento y de las circunstancias.

Si en cada observación intervienen dos personas, prácticamente resultará difícil determinar cuáles fueron deficientes. Se puede equivocar el observador, se puede equivocar el cronometrista; a veces lo advertirán y *otras no lo advertirán.* Por ejemplo, el cronometrista podrá anotar correctamente los quintos de segundo de una observación y equivocarse en los enteros, en una unidad de más o de menos.

Podríamos acumular más pruebas, sacadas de la realidad, en apoyo de nuestra tesis. ¿ Cómo exigir que no ha de desecharse ningún resultado individual ?

Esta pregunta, que la consideramos totalmente pertinente en el estudio crítico de nuestro trabajo, cabe también hacerla en las observaciones astronómicas más precisas. Y la repuesta la da Bouasse (obra citada, pág. 429) con su estilo cruelmente satírico que nosotros no compartimos, pero que en la transcripción respetamos :

« He aquí un pasaje que encuentro en Tisserand y que pone en evidencia el estado de alma de los sabios ¡ ay ! más inteligentes. »

« Se trata de la paralaje de Marte determinada por el método descrito en el artículo 236. Las observaciones datan del año 1672 ; ellas fueron realizadas por Cassini I en París y por Richer en Cayena y encontraron que la paralaje vale 9″5, lo que es prodigioso. »

« Pero para Tisserand no es prodigioso, porque :

« Il faut dire *toutefois* que ce résultat n' avait été obtenu que par un choix des observations les plus exactes et les plus conformes entre elles. »

« Este *toutefois* de Tisserand vale por un poema ; yo, como no soy un pontífice de la ciencia, me avergonzaría de haberlo escrito. »

Pero si continuamos nuestra réplica con tales argumentos, podrá parecer que perdemos inútilmente terreno, ya que nos empeñaríamos

en rebajar el valor técnico de un trabajo en el que, según el autorizado crítico, se han desechado en gran proporción resultados de mediciones inobjetables. En otros términos, nuestras observaciones merecerían un trato matemático más delicado.

Pero ¿ qué es lo que se entiende por medición inobjetable ? Puesto que, según se nos ha dicho, son objetables todos los criterios que existen para seleccionar resultados de observaciones, carecemos de fundamento formal para definir lo que es una medición correcta.

Están los criterios de Peirce y de Chauvenet, universalmente adoptados, pero que admiten tolerancias que repugnan al buen sentido.

Véase un caso que es realmente instructivo : un ingeniero tuvo a bien rehacer los cálculos del Cuadro VII, valiéndose de un nomograma para las refracciones y limitando las reducciones al décimo de segundo de tiempo. Encontró, previa corrección del error de índice :

$— 4^m55^s.4$
4.7
4.6
4.3
3.5
4.4
4.5
4.5
4.1
5.2

El calculista aplica a estos resultados el criterio de Chauvenet y deduce que no debe desechar ninguno. Hay en esto, evidentemente, un error de concepto. Si entre los diez resultados hay seis :

$— 4^m54^s.7$
4.6
4.3
4.4
4.5
4.5

que son concordantes, dentro de la precisión que puede esperarse y exigirse de los procedimientos empleados, no podrá admitirse jamás, lógicamente, que el quinto resultado, 53^s5, pueda agruparse con aquellos seis, pues está afectado de un error grosero, vale decir, impropio del método, del instrumento y de la habilidad normal de los operadores.

Bouasse, que no siempre exagera, dice a propósito :

« A la verdad, no debe tenerse ninguna confianza en la teoría de las probabilidades: una medida bien hecha vale más que un millón de medidas mal hechas. Pero si se admite que las medidas sean bien hechas, claro es que ofrecerán más garantías cuando se las repita *en condiciones muy diferentes :* he aquí el unico medio que permite descubrir — y por lo tanto corregir — los errores sistemáticos contra los cuales es impotente el valor medio en cualquier caso. »

Y más adelante, Bouasse dispara este tiro certero:

« Los razonamientos teóricos sobre la eliminación de los errores son verdaderos en el papel: *olvidan la mayoría de las condiciones reales.* Por esto, los astrónomos que son inteligentes (los hay) desconfían de las combinaciones y faramallas en que se gozan los experimentadores de corto vuelo. Cuando delante de vosotros se ensalcen estas bagatelas, desconfiad de vuestro interlocutor: no conoce su oficio ».

Acabamos de tocar el fondo del asunto: las condiciones reales a que se sujetaron las observaciones para determinar la longitud geográfica de Avía Teray.

Presentemos de inmediato la sinopsis que contempla la cuestión en todos sus aspectos :

A. *Objeto de las observaciones astronómicas :*
1. Resolución de un problema ferroviario;
2. Precisión económica.

B. *Calidad del trabajo :*
a) Valor geodésico :
3. Instrumentos utilizados;
4. Control de las señales radiotelefónicas;

b) Valor técnico :
5. Técnico, del problema;
6. Técnica de los operadores.

C. *Método y procedimientos.*

D. *Condiciones de ejecución :*
7. Campaña expeditiva;
8. Clima desfavorable;
9. Enlace astro-reloj;
10. El reloj;
11. El teodolito.

Y pasemos ligera revista a estos conceptos.

A. — OBJETO DE LAS OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS

1. Las observaciones astronómicas que se llevaron a cabo, tanto en el *puesto* San Martín (Departamento de Anta, Salta) como en Avía Teray (Departamento de Napalpí, Chaco) tuvieron por objeto el servir de datos para la resolución del siguiente problema ferroviario: dadas las coordenadas geográficas de los dos mencionados puntos, calcular y trazar la geodésica que los une partiendo simultáneamente de los dos extremos y sin que se sufra, en el rumbo, una desviación superior al uno por mil de la longitud del trazado.

Podrá extrañar *a priori*, que se hable de una geodésica, de 294 kilómetros de longitud, cuyo replanteo admita una desviación del uno por mil. Sin embargo, prácticamente se trazará en la superficie terrestre una geodésica o, si se parte de los dos extremos, dos geodésicas que tal vez se cortarán o no se encontrarán. En efecto, si consideramos definida a la geodésica por la propiedad de su plano osculador y si admitimos que en la superficie terrestre las verticales se confunden con las normales, una geodésica será la que prácticamente trazaremos si, partiendo de un punto con un azimut dado, nos mantenemos siempre en línea por sucesivos transportes de un instrumento de tránsito. Será una geodésica de poco valor geodésico, pero como geodésica será trazada.

2. Dado el objeto de nuestro trabajo, se explica que bastara una precisión afectada de un error inferior al uno por mil. Con toda propiedad podría hablarse de precisión *económica*. El trazado de una línea férrea en una vasta zona casi totalmente desierta, se ajusta a un presupuesto de mínima que excluye, de entrada, la adquisición de instrumentos y cronómetros de precisión y que, técnicamente, se considerará bien ejecutado sea que la desviación alcance a los 294 metros, sea que alcance a la mitad. Al ferrocarril no le interesa absolutamente que se disminuya el error. Es sólo una cuestión de amor propio o, si se quiere, de amor al arte.

De un detenido estudio que más adelante publicaremos, Dios mediante, deducimos que un error de desviación del uno por mil ya se alcanza con errores de $\pm 2''$ en *cada* latitud y $\pm 0^s5$ en cada longitud. Claro está que este par de valores no es único. Los errores probables cometidos por nosotros fueron:

En el *puesto* San Martín :

$$d\omega = 0^{s}37$$

$$d\varphi = 0''7$$

En Avía Teray :

$$d\omega = 0^{s}08$$

$$d\varphi = 0''9$$

y con ellos se llega a una total desviación probable de 117 metros, equivalentes al 0,4 por mil de la longitud de la geodésica.

B. — CALIDAD DEL TRABAJO

a) Valor geodésico

3. *Instrumentos utilizados.* — Nuestro trabajo es de un valor geodésico casi nulo; pero lamentaríamos que esta afirmación, dicha simplemente y con la honestidad que se debe a la ciencia, bastara a ciertos profesionales que dan los primeros pasos en estos menesteres o que aún no los han dado, para menospreciar una labor que es de alto mérito técnico y fruto de una penosísima campaña. Lo lamentaríamos por ellos (1).

Que nuestras observaciones no alcanzan valor geodésico, lo dicen los mismos instrumentos utilizados: un teodolito común de 10″ y un reloj de bolsillo. Ni una palabra más.

4. En desacuerdo también con un valor geodésico, estaba la falta de registro de las señales radiotelegráficas ; de este registro o comprobación no supimos absolutamente nada hasta mucho después ; y resultó que no lo hubo de parte de la estación transmisora. De parte de la estación receptora sólo cabía, lógicamente, un control de segunda mano y que se tuvo presente, a saber: la comparación de los valores de la longitud geográfica obtenidos en varios y discontinuos días. Y ahora viene una observación personal : los cinco tops que daba la

(1) Hemos cambiado inopinadamente de estilo para referirnos, no ya a la presente crítica sino a esas plumas volanderas que no escriben pero borronean y constituyen la negación de toda crítica.

La crítica es la fuerza creadora que incita noblemente a cavar en las ideas. Lo otro, es la engañosa quietud del pantano en cuya superficie, tersa al parecer, revientan calladamente los gases del pequeño organismo que se asusta de la misma onda que provoca.

Dársena norte por noche, no eran rigurosamente concordantes. Así, para referirme sólo al caso que tengo más presente, en junio 7 de 1923 (véase pág. 75, t. CI de los *Anales*) yo registro el tercer top a los 47^s2, el cuarto a los 47^s0 y el quinto otra vez a los 47^s2. Tuve esta noche, y otra más, la impresión neta de que en la Dársena había maniobra y no mecanismo integral. Por lo tanto, este defecto, no compensado con el registro de los tops en la misma estación transmisora, ya nos eximía de tratar a los resultados individuales con exagerada cortesía.

b) Valor técnico

5. El problema planteado por el trazado de la línea de Metán a Barranqueras preocupó desde el primer momento al ingeniero jefe de la construcción, don Alberto R. Pasquini; y una vez que fué adoptada la línea recta para una gran parte del trazado, desde un punto determinado de Salta hasta Avía Teray, se tuvo el firme propósito de dar a las operaciones una base científica que garantizara una precisión económica e infundiese la más absoluta confianza a todo el personal de las comisiones de estudio. El problema era interesante; no cabía una ejecución grosera, impropia de universitarios y artera apañadora de las indecisiones; las indecisiones ocasionan siempre pérdidas de tiempo y de dinero; era, pues, necesario, el examen que determinara la influencia de los errores de las observaciones astronómicas sobre el rumbo del trazado y fijara hasta cierto punto la categoría del método y el tipo de los instrumentos a emplear.

Había que desarrollar técnica, pero técnica geodésica en el fondo, aun cuando ella se aplicara al trazado de ferrocarriles; y que lo entendimos así, desde el primer momento, lo prueban las gestiones que hicimos para dotar a la Comisión de estudios de:

Un teodolito geodésico;

Dos cronómetros; y

Un equipo radiotelefónico (nos dió casualmente la idea el ingeniero Antonio Rebuelto).

No conseguimos nada. Comprar cronómetros astronómicos, pareció excesivo, puesto que ninguna otra comisión de estudios los había aún pedido...: en cuanto al receptor radiotelefónico, no se aceptó que pudiera ser útil a tal distancia; y descartada la recepción de señales radiotelegráficas, sólo quedaban las ocultaciones de estrellas por la luna, y entonces ya estaba de más el teodolito con microscopios micrométricos que nos hubiera procurado determinaciones de tiempo y

de azimut de una precisión notablemente superior al registro de las ocultaciones.

Digamos, de paso, que las determinaciones de longitud por el método de ocultación de estrellas por la luna, resultan muy caras si han de acompañarse con el certificado de garantía de su precisión. ¿ Cuánto ? A nosotros ya nos parecería extraordinario el cuarto de segundo.

6. Limitado, pues, el instrumental a un teodolito y a un mal reloj de bolsillo que pudo reemplazarse más tarde por otro mejor de propiedad particular, asombra que los operadores hayan llegado triunfalmente a la meta ; pero para valorar cabalmente la constancia de los operadores geodésicos que actuaron en la Comisión de estudios del ferrocarril en construcción de Metán a Barranqueras, se necesita haber hecho algo parecido en condiciones parecidas : las inclemencias del tiempo ; los alimentos podridos, los gusanos en el agua y las alimañas en la carpa ; las garrapatas, las vinchucas, el cocinero, vinchuca real ; las abejas, las moscas, los mosquitos, los tábanos y los polvorines ; la soledad, la estupidez de algunos, la hostilidad de otros ; los cambios frecuentes de campamento trabajando, no a la par sino más que los peones ; y, como única perspectiva natural, el túnel de la picada, enorme tubo acústico donde resonaba a mediodía la estridente polifonía de los insectos llevada al paroxismo.

Con el pobre instrumental mencionado, ¿ qué son mediciones inobjetables ?

Para un operador determinado, son mediciones inobjetables aquellas que pueden estar afectadas de un error que oscile alrededor del promedio de los errores residuos a que aquél esta acostumbrado. Ciertamente esta definición, que no la tomamos de nadie, podrá adoptarse cualquiera que sea el instrumental, pero nos parece, y a esto vamos, que si se toma como base de las reducciones en nuestro caso, tendremos el derecho de eliminar sin contemplaciones los resultados individuales *objetables*, pese a la idea de que no debe desecharse ninguna observación que no haya sido marcada como defectuosa.

Veamos algunos casos concretos.

Sea el cuadro XIII (tomo CI de los *Anales*, págs. 50 y 51).

Nótese que desechamos el primer valor y que ello nos conduce a una corrección cronométrica definitiva de

$$-\ 4^{m}45^{s}14 \text{ a } 10^{h}23^{m}.$$

Tengamos ahora en cuenta la primera observación, obedeciendo al criterio que nos ha sido señalado de que no debe despreciarse ningún

elemento experimental que no haya sido objetado. Llegamos así, a este resultado:

$$-4^m45^s10 \text{ a } 10^h23^m,$$

es decir, prácticamente, al mismo resultado anterior. Prácticamente sí, lógicamente nó; el primer resultado es correcto, el segundo está afectado de un vicio de nulidad. Expliquemos esta paradoja. Limitemos los resultados individuales a los décimos de segundo:

C. I.	C. D.
— 4ᵐ43ˢ70	— 4ᵐ46ˢ10
4.00	6.20
4.30	6.00
4.30	6.10
4.30	6.00
— 4ᵐ44ˢ12	— 4ᵐ46ˢ08

Semi-diferencia : 0ˢ98.

Corrijamos los resultados individuales de esta semi-diferencia, que es, aproximadamente, el error de índice y obtenemos:

	v	vv
— 4ᵐ44ˢ68	— 0,42	0,1764
4.98	— 0,12	0,0144
5.28	0,18	0,0324
5.28	0,18	0,0324
5.28	0,18	0,0324
5.12	— 0,02	0,0004
5.22	0,12	0,0144
5.02	— 0,08	0,0064
5.12	0,02	0,0004
5.02	— 0,08	0,0064
— 4ᵐ45ˢ10		$[vv] = 0,3160$

Error medio probable:

$$\varepsilon_0 = 0,6745\sqrt{\frac{0,3160}{10 \times 9}} = \pm\, 0^s04.$$

Aceptar la aplicación que precede, implicaría desconocer un concepto fundamental de la teoría de los errores. No sería necesario aplicar el criterio de Peirce: bastará el buen sentido para señalar como defectuosa la primera observación, cuyo error residuo es de 0,42. El mencionado criterio señala, en este caso, como máximo error aceptable, el valor 0^s35. Luego, el promedio -4^m45^s10 es falso

aunque difiera extremadamente poco del promedio más exacto — 4^m45^s14.

Tomemos otro ejemplo, el cuadro XXV (pág. 70 del tomo CI). No despreciando ninguna observación, llegamos a un promedio general de — 4^m29^s74, en lugar de — 4^m29^s60 determinado con la eliminación de las observaciones 1ª, 2ª, 9ª y 10ª. Un décimo de segundo de diferencia: ¿qué importancia tiene ante lo primitivo de nuestra instalación?. Nosotros no tratábamos los resultados individuales con el sombrero a la mano. Conocíamos bien su modesto origen, su obtención penosa; de ahí que nos propusiéramos suplir, aunque defectuosamente, la precisión individual por la extensión y por la repetición en condiciones distintas: por los cambios atmosféricos, por las alturas de observación, por las estrellas utilizadas, por los métodos astronómicos y la confrontación de los tops radiotelefónicos de un día para otro.

Volvamos al cuadro XXV. Admitiendo que

$$\frac{\Sigma\,(C.\,I.) - \Sigma\,(C.\,D.)}{10} = 2^s6$$

pueda atribuirse íntegramente al error de índice, llegamos a los siguientes resultados, limitados al décimo de segundo:

	v	vv
— 4^m29^s9	0,2	0,04
30.0	0,3	0,09
29.8	0,1	0,01
29.5	— 0,2	0,04
29.5	— 0,2	0,04
29.6	— 0,1	0,01
29.7	0,0	0,00
29.6	— 0,1	0,01
30.0	0,3	0,09
29.8	0,1	0,01
— $4^m29^s7/4$		$[vv] = 0,34$

$$\varepsilon_0 = 0,6745 \sqrt{\frac{0,34}{10 \times 9}} = \pm\, 0^s04.$$

Nos guardaríamos de fundar conclusiones optimistas sobre este pequeño error probable, deducido de sólo diez observaciones que conducen a altos valores residuales.

Aceptamos, con Bouasse, que no debe hilarse muy delgado en las aplicaciones numéricas de los cuadrados mínimos, porque se cae en lo rídiculo. Este autor cita, en su Astronomía teórica y práctica, la

determinación de la diferencia de longitud entre París y Washington, mediante el empleo de la telegrafía sin hilos; y dice:

«Pareciera que a propósito se complicó la operación con un cúmulo de comparaciones accesorias que, de ninguna manera, la señalan como modelo. Me bastará decir que las determinaciones aisladas difieren en más de 0ˢ3 para que el lector sepa lo que valen los milésimos de segundo del número *definitivo*: $5^h17^m36^s651$.»

Echemos nueva ojeada sobre la planillita precedente y preguntémonos si no hubiera sido más discreto, *más en armonía con la naturaleza de las cosas*, suprimir a ojo los resultados individuales segundo y noveno, con sólo verlos en el cuadro XXV (son los resultados — 4^m32^s63 C. I. y — 4^m27^s43 C. D.). Suprimiéndolos, llegaríamos al siguiente promedio: — 4^m29^s67, que difiere en 0^s07 del promedio de la planillita... Estamos perdiendo el tiempo.

Bueno está que las observaciones obtenidas con el manejo de un buen instrumental y con una sola persona, se respeten más en el cálculo. Sean, como ejemplo, las observaciones hechas por el autor con altazimut Gautier y cronómetro sidéreo Fénon, el 15 de febrero de 1917, trabajando a ojo y oído:

		v	vv
1......	— 1^m15^s55	— 0,01	0,0001
2......	15.50	— 0,06	0,0036
3......	15.54	— 0,02	0,0004
4......	15.32	— 0,24	0,0576
5......	15.54	— 0,02	0,0004
6......	15.68	0,12	0,0144
7......	15.68	0,12	0,0144
8......	15.71	0,15	0,0225
	— $1^m15^s56{,}5$		$[vv] = 0{,}1134$

$$\varepsilon_n = 0{,}6745\sqrt{\frac{0{,}1134}{8 \times 7}} = \pm\, 0^s03.$$

¡Lástima que desentone tanto la cuarta observación! Habría que eliminarla pero, que se la deje o se la saque, el resultado será prácticamente el mismo con un error probable prácticamente igual.

He aquí un ejemplo que tomamos de Herr-Tinter (*Lehrbuch der sphärischen astronomie*, Viena, 1923).

El 4 de julio de 1869 fueron observadas en Viena, con instrumento universal Starke y Kammerer, de limbo zenital de diez pulgadas, las siguientes distancias zenitales de *α Coronae borealis*, al Este:

¿A ojo y oído?

Posición del círculo	Tiempo sidéreo	Lecturas micrométricas I	Lecturas micrométricas II	Nivel: $1^p = 2''26$ a	Nivel: i	Barómetro
C. D.	$11^h53^m53^s.9$	256°00′07″.2	0′18″.7	13,5	16,1	11^h40^m : 753^{mm} a 24°.2 C
	55 57.9	255 39 37.0	39 47.7	13,1	16,6	
	58 11.5	255 17 34.6	17 45.8	13,2	16,4	
	12 00 20.0	254 56 23.0	56 34.8	13,0	16,8	
	2 38.4	254 33 39.7	33 50.6	12,9	16,9	
C. I.	12 06 59.2	166 09 27.5	9 24.9	18,2	11,7	12^h25^m : 753^{mm} a 24° C
	9 10.0	166 30 56.0	30 53.1	18,0	11,8	
	11 27.7	166 53 28.1	53 25.8	17,5	12,4	
	13 25.5	167 12 40.7	12 37.7	17,5	12,5	
	15 48.2	167 35 57.8	35 55.5	17,1	12,8	

La reducción de estas observaciones condujo a los siguientes valores:

C. D.	C. I.
$1^m56^s.78$	$1^m57^s.12$
56.90	57.34
56.95	57.30
57.00	57.08
56.73	57.14

Los resultados individuales aparecen aquí *mezclados* y sin tendencia definida. Se aceptan todos.

Finalmente, si se trabaja con cronógrafo, las diferencias entre los resultados parciales serán menores y ya no cabrá distinguir, puesto que aquéllas girarán alrededor del error medio de observación.

He aquí un ejemplo que tomamos de nuestras observaciones con un telescopio zenital Wanschaff, realizadas el 14 de septiembre de 1917 en el Observatorio astronómico de La Plata:

Número	v	vv
1	0,030	0,0009
2	0,034	0,0012
3	0,012	0,0001
4	0,139	0,0193
5	0,021	0,0004
6	0,172	0,0296
7	0,026	0,0007
8	0,039	0,0015
		$[vv] = 0,0537$

$$\varepsilon_0 = 0,6745 \sqrt{\frac{0,0537}{8 \times 7}} = \pm 0^s02.$$

C. — MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

Sobre el método de determinación del tiempo con alturas aisladas de un astro, nada tenemos que agregar a lo poco que dijimos (capítulo V de nuestra primera monografía, tomo CI de los *Anales*).

Pero corresponde aquí que nos hagamos cargo de la siguiente crítica (¹):

« El resultado definitivo de la longitud está caracterizado por un error probable que no corresponde a la realidad, ya que el autor no lo ha depurado de los errores constantes inherentes al método usado. Con la salvedad que implican las consideraciones precedentes, el error probable asignado representaría el error probable interno del resultado alcanzado. »

Preguntamos: ¿ cómo podíamos haber depurado *completamente* nuestro resultado definitivo si la estación de la Dársena norte daba las señales horarias en 1923, en forma tan primitiva que ni siquiera quedaba el testimonio cronográfico de las mismas ?

Preguntamos: ¿ por qué pretender que nosotros desplegáramos una ampulosa actividad de gabinete cuando nuestras observaciones adolecían de dos defectos fundamentales : *a)* enlace astro-reloj por inter medio de *dos* personas: *b)* ignorancia sobre el funcionamiento de la estación radiotelegráfica transmisora ?

El puesto de San Martín, en Salta, se encontraba a 130 kilómetros de la estación ferroviaria más próxima; y como sólo cada diez o doce días el auto-correo nos ponía en comunicación con el resto del mundo, hubiera sido inútil, y hasta inaceptable para el desarrollo de las demás operaciones de campaña, esperar noticias de Buenos Aires para saber a qué atenerse. Así y todo, solicité inmediatamente al ingeniero jefe de la construcción que recabara informes sobre la estación de la Dársena norte. Nunca los obtuve oficialmente. Sólo más tarde, cuando quedé libre de trabas administrativas, supe lo que consta en mi monografía primera (tomo CI de los *Anales*, pág. 14).

Creo sinceramente que, tanto en Salta como en el Chaco nacional, desarrollamos la estrategia que mejor convenía a nuestros medios de combate. Dados los defectos fundamentales mencionados, el buen sentido indicaba que, a pesar de tratarse de una campaña expeditiva,

(¹) Es la crítica VII.

era necesario repetir, durante varios días, las operaciones astronómicas y radiotelegráficas. Con riguroso registro en la Dársena norte y en nuestro campo, dos días habrían bastado; faltando este registro, la confianza debía venir de otra parte; y declaramos que los tops de la Dársena norte merecieron nuestra confianza cuando comprobamos que con ellos y en varios y discontinuos días, obteníamos resultados que, ante nuestro equipo, podían calificarse de altamente concordantes.

¿Qué hacíamos, pues, nosotros cada noche? Recogíamos una abunte cosecha de resultados individuales y luego apartábamos, *manu militari,* los que no nos gustaban. Si después de cinco o seis días de tal selección — que tal vez deje espantado a algún miope de gabinete que no tenga la visión neta de nuestra campaña por no haberla vivido nunca — alcanzamos resultados cuya concordancia nos satisfizo plenamente, nada más necesitábamos para convencernos: nuestra misión quedaba cumplida *de la manera más perfecta posible.*

D. — CONDICIONES DE EJECUCIÓN

Después de cuanto dejamos dicho, caeríamos en redundancia si tocáramos los puntos 7, 8 y 9 de la sinopsis de la página 25.

En lo que concierne a los puntos 10 y 11, bastará que patenticemos la modestia de nuestras observaciones confrontando nuestro equipo con los utilizados por otros en campañas análogas:

Teniente de navío Luisoni (División hidrografía del Ministerio de marina, 1922).

Teodolito universal Bamberg, con micrómetros de 2″;
Un cronómetro sidéreo Leroy, de contactos eléctricos;
Un cronógrafo eléctrico Fabarger;
Estación receptora, con lámpara detectora y cinco lámparas amplificadoras.

Geodesta Jansen (Instituto geográfico militar, 1923):

Teodolito universal Bamberg con nivel Talcott;
Dos cronómetros Nardin y Bond, de contactos eléctricos;
Un cronómetro acompañante Nardin;
Un cronógrafo a diapasón Fénon;
Estación receptora con lámpara detectora y dos lámparas amplificadoras, provista de mecanismo autorregistrador de las señales.

Ingenieros Lascano y Aramburo (Ferrocarriles del Estado, 1923):

Teodolito Breithaupt de 10″;

Un reloj de bolsillo marca Omega;

Estacion receptora, con lampara detectora y dos lámparas amplificadoras.

Conclusiones

A modo de conclusiones y de complemento de esta réplica — cuyo excesivo desarrollo débese, tal vez, a la fruición que se experimenta recordando y grabando acontecimientos que dejaron huella en nuestro espíritu, — analicemos las observaciones astronómicas del día 7 de junio de 1923 (cuadros XX al XXIV y XXVII, tomo CI de los *Anales*) (1).

Observaciones de ε Sagittarii

Círculo a la izquierda. — Imposible aceptar el conjunto de los cinco resultados finales. Tal vez en el cuarto haya habido un error grosero de lectura cronométrica, leyéndose 52^s2 en lugar de 53^s2.

Prima facie, hay dos grupos de adopción probable:

Primer grupo	Segundo grupo
— 4^m47^s66	— 4^m47^s66
47.14	47.95
47.34	48.20

El segundo resultado del primer grupo es francamente anómalo. Para determinar la causa de semejante anomalía deberíamos entrar en lo conjetural. No perdamos tiempo y razonemos sobre los resultados mismos: no puede aceptarse un 47^s14 después de haber encontrado un 47^s95 y un 48^s20. Nos decidimos, pues, por el segundo grupo.

Círculo a la derecha. — Eliminamos el quinto resultado y nos quedan otros cuatro cuya discrepancia máxima es de 0^s5. Es la discrepancia que, a manera de norma general, se admitía en los grupos de valores.

(1) No es nuestro propósito justificar *à outrance* el camino que seguimos en la reducción de estas observaciones o de otras cualesquiera que quisiéramos nuevamente analizar. Más que todo, nos place ahora hacer confesión, generosa e imparcial, de la lógica y del procedimiento que allí nos guiaron. Así, pues, repetimos lo dicho en la monografía (*Anales*, tomo CI, pág. 17): «Si examináramos nuevamente los cálculos, tal vez nos guiara otro criterio en cierta parte de la reducción de las observaciones.»

Observaciones de β Leonis

Círculo a la izquierda. — Muy buenos los últimos cuatro resultados. Se desechó el primero.

Círculo a la derecha. — Estamos probablemente en presencia de las cinco observaciones más discordantes de toda la serie. Sólo divagaríamos si pretendiéramos determinar el origen de anomalías tan desconcertantes. Los resultados cuarto y quinto no sirven, sea que se les compare entre sí o con los otros tres. Estos otros tres podrían admitirse; resolvimos, sin embargo, eliminar el segundo, ya que consideramos que debía ejercer más influencia indirecta el quinto resultado que el cuarto. Llegamos, así, al promedio con C. D. de 4^m46^s31.

Para los que consideran que no debe despreciarse ninguna observación que no haya sido tachada o señalada por los operadores, hacemos presente que el promedio de los cinco resultados da — 4^m46^s29, valor que, prácticamente, coincide con el anterior.

La combinación de las observaciones de ε *Sagittarii* y de β *Leonis* nos lleva a este valor de la longitud :

$$\omega_1 = 4^h02^m56^s74 \text{ (cuadro XXVII).}$$

Claro es que a un resultado obtenido de esta manera poco neta y aisladamente, le habríamos concedido escasísima importancia. Por suerte, otras observaciones del día 7, nuestras también, nos brindaron una abundante comprobación.

Primera comprobación

El Gauss, con γ *Velorum*, α *Scorpii* y α *Leonis* da : a 7^h24^m una corrección cronométrica de —4^m46^s29.

Por otra parte, ε *Sagittarii* con β *Leonis* dan : a 9^h44^m, una corrección de — 4^m44^s27.

Marcha por minuto : — $0^s,0144$.

Corrección por la marcha, de las 9^h44^m a las 10^h02^m (época del último top radiotelefónico) : + 0^s26.

Corrección cronométrica final = — $4^m44^s27 + 0^s26 = - 4^m44^s01$.

Luego

$$\omega_2 = 14^h - (10^h01^m47^s20 - 4^m44^s01) = 4^h02^m56^s81.$$

Este resultado difiere del anterior en 0^s07.

Segunda comprobación

El Gauss, con η *Boötis*, ζ *Aquilae* y ζ *Centauri* nos da — 4^m43^s54 a 10^h57^m, que, en combinación con — 4^m44^s27 a 9^h44^m del grupo ε *Sagittarii* — β *Leonis*, conduce a un valor

$$\omega_3 = 4^h02^m56^s89.$$

Tercera comprobación

El Gauss, con ε *Virginis*, ζ *Pavonis* y ζ *Aquilae* da una corrección cronométrica de — $4^m43^s,51$ a 10^h45^m, que, combinada otra vez con la dada por el grupo ε *Sagittarii* — β *Leonis*, conduce a este valor de la longitud geográfica:

$$\omega_4 = 4^h02^m56^s77.$$

Finalmente, he aquí una comprobación, limpia de todo defecto:

Los tres Gauss que han sido utilizados en las comprobaciones precedentes dan las siguientes correcciones cronométricas:

$$-\,4^m46^s29 \quad a \quad 7^h24^m$$
$$-\,4\ \ 43.51 \quad a \quad 10\ \ 45$$
$$-\,4\ \ 43.54 \quad a \quad 10\ \ 57.$$

Los dos últimos resultados podemos fundirlos en uno solo y poner

$$-\,4^m43^s52 \quad a \quad 10^h50^m;$$

y aplicando la fórmula (1):

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2} - 30\mu\,(T_1 + T_2 - 2T)$$

dada en los *Anales*, tomo CI, página 16, tenemos:

$$C_1 = -\,4^m46^s29;$$
$$C_2 = -\,4\ \ 43.52;$$
$$\mu = -\,0{,}01345 \text{ seg/min}^{-1};$$
$$T_1 = \ \ 7{,}40 \text{ horas};$$
$$T_2 = 10{,}83 \quad » \quad ;$$
$$T = 10{,}03 \quad » \quad :$$

y luego

$$C = -4^m 44^s 16 \quad a \quad 10^h 01^m 47^s 20.$$

Así llegamos a este *nuevo* valor individual de la longitud :

$$\omega_5 = T_0 - (T + C) = 14^h - (10^h 01^m 47^s 20 - 4^m 44^s 16) = 4^h 02^m 56^s 96,$$

que coincide rigurosamente con otros tres valores del cuadro XXVII (*Anales,* tomo CI, págs. 74 y 75).

En resumen, el valor ω_1 pudo aceptarse como valor individual : primero, porque, según el cuadro XXIX, no es un valor extremo (aun limitándose a la serie de Aramburo) ; y segundo, porque comparadas las observaciones que conducen a ω_1 con otras absolutamente independientes, se llega a resultados cuya discrepancia no tiene nada de anormal en la misma serie.

ACELERACIÓN MÁXIMA Y ABSORCIÓN DEL MEDIO

Por GALDINO NEGRI

CON LA COLABORACIÓN DE ROSA LAUBERER DE KERN

Un elemento que se debe tener en cuenta en el cálculo de la intensidad y de la aceleración máxima en un punto cualquiera de la superficie terrestre, es la pérdida debida a la absorción del medio.

Como todas las energías que se propagan a través de un medio, así también se comprende que la intensidad del terremoto en un punto cualquiera de la superficie del globo, además que de su distancia del centro del sacudimiento (hipocentro), debe depender de la naturaleza del medio, a través del cual se propagan las ondas producidas por el sacudimiento.

Es de muy fácil comprensión que en dos estaciones que distan del epicentro igual cantidad de kilómetros (200, por ejemplo), pero que el medio interpuesto entre la primera y el epicentro esté constituído por terrenos incoherentes, arenosos; y el interpuesto entre el hipocentro y la segunda estación esté constituído por rocas duras, como los gneis, los doritas, las sienitas, etc., se tendrá, si bien igualmente distante del hipocentro, en la primera una intensidad menor que en la segunda. Esta mayor pérdida de energía con respecto a la primera estación es debida al hecho de que el terreno incoherente arenoso, absorbe más energías que las rocas duras y compactas.

Sabemos que la intensidad del terremoto en un punto, M es medida por la energía desarrollada por ese terremoto sobre la unidad de masa en la unidad de tiempo.

La relación general :

$$I = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m A^2 t^2,$$

resulta :

$$I = \frac{1}{2} A^2;$$

y con respecto a otro punto tendremos :

$$I_1 = \frac{1}{2} A_1^2;$$

y por lo tanto será :

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A^2}{A_1^2},$$

y siendo las intensidades inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias, tendremos :

$$\frac{I}{I_1} = \frac{r_1^2}{r^2};$$

o sea :

$$\frac{A^2}{A_1^2} = \frac{r_1^2}{r^2};$$

y en fin tendremos :

$$\frac{A}{A_1} = \frac{r_1}{r}; \qquad (1)$$

es decir, las aceleraciones máximas son : inversamente proporcionales a las respectivas distancias del hipocentro.

Si una de las dos estaciones consideradas fuera el mismo epicentro, se tendría :

$$A_1 = A_0, \qquad r_1 = q;$$

y por lo tanto se tendrá :

$$\frac{A}{A_0} = \frac{q}{r}. \qquad (2)$$

En la práctica se puede substituir S en lugar de r (porque r no es medible directamente, no conociéndose q) y el error de esta substitución si S es superior a algunos centenares de kilómetros es despreciable, puesto que la profundidad de los hipocentros a lo sumo alcanzan valores seguramente menores de 70 kilómetros, valor este que representa la profundidad media de la costra terrestre.

Tendremos así :

$$\frac{A}{A_0} = \frac{q}{S}. \qquad (3)$$

A . A_0 y S son medibles directamente, y, por lo tanto, podremos calcular q.

Pero en la medida de la A y A_0 de la (2) no se tiene en cuenta la pérdida que experimentan las A y las A_0 por la absorción del medio, respectivamente a lo largo de la r y de la q.

Kövesligethy, sismólogo húngaro, introdujo una variante tomando en cuenta dicho factor, y la (2) se convierte en la

$$\frac{A}{A_0} = \frac{q}{r} \cdot e^{-\frac{\alpha}{R}(r-q)}, \qquad (4)$$

donde α es la energía absorbida, e es la base de los logaritmos neperianos, R el radio de la tierra, r el radio sísmico hipocentro estación, q la profundidad del hipocentro.

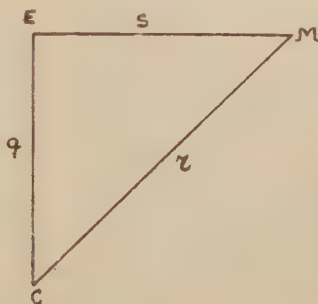


Figura 1

Vamos a ver cómo varía la intensidad con el aumentar de la distancia epicentral. Sea entonces I la intensidad a la unidad de distancia del hipocentro C. Tendremos que para un punto P la intensidad será:

$$I_P = \frac{I}{r^2};$$

y si asumimos la unidad de distancia bastante pequeña, el kilómetro por ejemplo, tendremos que sensiblemente (a lo menos con muy pequeño error, tanto más considerando que el concepto de hipocentro-punto es una mera abstracción) subsistirá la relación

$$I_P = \frac{I_C}{r^2},$$

donde I_c es la intensidad en el hipocentro, o sea tendremos :

$$I_p = \frac{I_c}{S^2 + q^2}. \quad (5)$$

Para que la (5) sea sensiblemente verdadera, es necesario que S no sea demasiado grande, para poder sin sensible error, o por lo menos

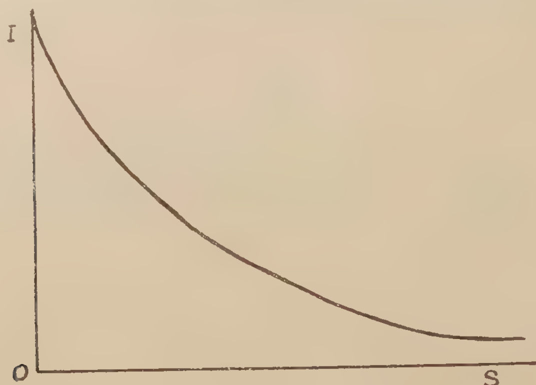


Figura 2

con un error no muy grande, despreciar la pérdida de energías debidas a la absorción del medio.

Por lo pronto se ve que I_p será máximo cuando S sea 0 (siendo I_c

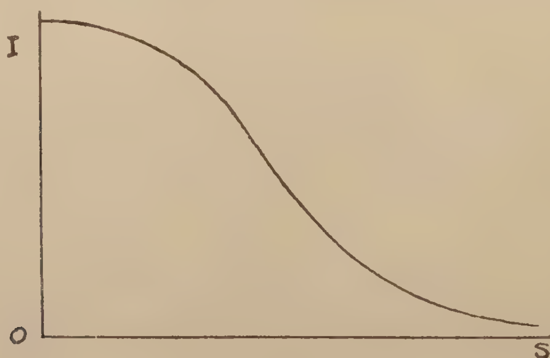


Figura 3

y q constantes para cada terremoto), y entonces el máximo del choque sobre la superficie terrestre lo tendremos en el epicentro.

A partir del epicentro con el aumentar de la distancia epicentral, la intensidad disminuye rápidamente antes, y después desde un cierto

punto aumentando siempre la distancia epicentral, la intensidad disminuye menos rápidamente antes, lentamente después, lentísimamente en seguida, y, en fin, disminuye asintóticamente.

Con la observación directa en zonas epicentrales adyacentes y cercanas con respecto a terremotos muy violentos, y con los sismógrafos ubicados en estaciones lejanas, lejanísimas, remotas o antipodales, se comprobaron esos estados en la variación de intensidad con el aumentar de la distancia epicentral.

Con el solo auxilio de las observaciones no podemos decir cuál será el diagrama de esta intensidad, porque según los datos proporcionados por las observaciones, las dos figuras 2 y 3 representarían las dos la curva de la intensidad, satisfaciendo las dos a cuanto ya se ha expuesto con respecto a dichas observaciones. Se comprende que sólo una de esas curvas será la verdadera; pero ¿cuál de las dos? Veamos. Sea entonces :

$$I_P = \frac{I_C}{S^2 + q^2}.$$

La $I_P \dfrac{d^2 I_P}{dS^2}$ será positiva si la curva es convexa, y negativa si la curva es cóncava, y en este caso tendremos :

$$I_P \frac{d^2 I_P}{dS^2} = I_P \frac{4 I_C q^2 S^2 + 6 I_C S^4 - 2 I_C q^4}{(S^2 + q^2)^4}. \qquad (6)$$

Ahora, en el origen, haciendo $S = 0$ será :

$$\frac{d^2 I_P}{dS^2} = - \frac{2 I_C q^4}{q^8} = - \frac{2 I_C}{q^4},$$

que es negativa, es decir, la curva es cóncava, y se mantendrá tal hasta que :

$$\frac{d^2 I_P}{dS^2} < 0.$$

En el punto donde fuera

$$\frac{d^2 I_P}{dS^2} = 0,$$

tendremos un punto de inflexión, y la curva de cóncava pasará a convexa a través de ese punto.

De la ecuación :

$$4 q^2 S^2 + 6 S^4 - 2 q^4 = 0,$$

despejando S obtengo :

$$S = \frac{q}{\sqrt{3}},$$

o sea :

$$q = S\sqrt{3}.$$

Así que el punto de inflexión de la intensidad se encuentra a una distancia epicentral :

$$S_i = \frac{q}{\sqrt{3}}, \qquad (7)$$

distancia que llamo «distancia de inflexión de la intensidad», y la indicaremos con S_i. Substituyendo este valor en la (5) obtengo :

$$I_P = \frac{I_C}{\frac{q^2}{3} + q^2} = \frac{3I_C}{4q^2},$$

que representa el valor de la intensidad en el punto de inflexión, valor que llamaré con I_i; y por lo tanto será :

$$I_i = \frac{3I_C}{4q^2}, \qquad (8)$$

S_i e I_i representarán, por lo dicho, las coordenadas del punto de inflexión de la intensidad I, intensidad que llamaré «intensidad de inflexión» y que representaré con la letra I_i.

La relación $q = S\sqrt{3}$ es conocida en sismología como relación de Dutton, y se usa en sismología para la determinación de la profundidad del hipocentro, cuando se puede con suficiente aproximación determinar la distancia de inflexión de la intensidad, que en la práctica generalmente es determinada investigando a qué distancia empiezan a disminuir los efectos dinámicos del terremoto.

La I_P será, por lo visto, una línea cóncava, y después se volverá convexa a través de un punto de inflexión, disminuyendo asintóticamente, como lo demuestra la figura 3.

Si en lugar de la intensidad, consideramos la aceleración máxima para cuanto hemos dicho, tendremos :

$$A_P = \frac{A_C}{r} = A_C (S^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}},$$

y derivando dos veces obtengo :

$$\frac{d^2 A_P}{dS^2} = - A_C S \left\{ - 6S (S^2 + q^2)^{-\frac{5}{2}} \right\} - A_C (S^2 + q^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Igualando a 0 el segundo miembro, y resolviendo la ecuación despejando S, obtengo :

$$S = \frac{q}{\sqrt{2}};$$

y por lo tanto :

$$q = S\sqrt{2};$$

y usando una notación análoga a la usada para la intensidad, tendremos :

$$S_i' = \frac{q}{\sqrt{2}}$$

(llamo con S_i' la distancia epicentral correspondiente al punto de inflexión de la aceleración máxima, y llamaré esa distancia «distancia de inflexión de la aceleración»).

Naturalmente que si el medio de las capas terrestres a través de las cuales se transmite el choque sísmico, a partir del hipocentro fuera homogéneo en todas direcciones, la S_i' sería igual para todas las direcciones, y la línea que uniere los puntos de inflexiones de la aceleración máxima, sería evidentemente una circunferencia, es decir, la isosista de inflexión de la aceleracion máxima, sería una circunferencia, mientras que en realidad no la es, variando generalmente el medio a través del cual se transmite el choque sísmico de dirección a dirección. Se comprende que cuanto digo para la aceleración máxima, vale para las intensidades.

Hemos visto que la intensidad en un punto P de la superficie terrestre es expresada con $\frac{I_C}{r^2}$; y la aceleración máxima con $\frac{A_C}{r}$.

Se ve evidentemente que la intensidad debe disminuir más rápidamente que la aceleración máxima, así que el punto de inflexión de la intensidad debe encontrarse a una distancia epicentral menor que el punto de inflexión de la aceleración máxima.

De las dos relaciones

$$q = S_i\sqrt{3}, \qquad q = S_i'\sqrt{2},$$

tendremos :

$$S_i\sqrt{3} = S_i'\sqrt{2};$$

o sea :

$$\frac{S_i}{S_i'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \tag{9}$$

es decir : las relaciones entre las dos distancias epicentrales correspondientes respectivamente a los dos puntos de inflexión están entre sí como $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

En sismología, como se sabe, para medir la intensidad hay escalas empíricas con los grados I, II, III, IV, V, VI, ..., XII, etc., y con esos grados se abarcan todas las aceleraciones desde una pequeña fracción de milímetros hasta 12000 milímetros por segundo (aceleración ésta, por supuesto, nunca alcanzada, ni aun en los sismos más violentos, por lo menos en nuestra era).

Los terremotos más fuertes desde la época histórica hasta nuestros días ciertamente no alcanzaron nunca 6000 milímetros por segundo.

Los grados correspondientes a dicha escala, claro está, son empíricos, y arbitrarios por lo tanto.

A Omori le pareció que la profundidad hipocentral proporcionada por las relaciones de Dutton era muy grande, y por lo tanto construyó una curva; la ordenada de las cuales son cantidades proporcionales a los diferentes efectos producidos por la aceleración máxima de las partículas terrestres bajo la acción del choque sísmico.

La relación de Dutton se obtiene, como hemos dicho, considerando primeramente la intensidad variable con el cuadrado de la distancia; y aplicando conceptos rigurosamente matemáticos, se ha visto que la curva correspondiente es cóncava antes, convexa después a través de un punto de inflexión; resultando que la distancia de inflexión de las intensidades es independiente de la intensidad del choque sísmico en el hipocentro (o en el epicentro). La modificación introducida por Omori, se debe tal vez al hecho de que en la fórmula de Dutton no se tiene en cuenta el factor geológico que, como es bien sabido, juega un rol muy importante en dichos cálculos.

El diagrama determinado de la ecuación ya vista y que llamaré *curva de la aceleración máxima* es análogamente a la de las intensida-

des, primeramente cóncava, y después convexa a través de un punto de inflexión, disminuyendo después asintóticamente. Si en la

$$A_P = \frac{A_C}{\sqrt{S^2 + q^2}},$$

en lugar de S, pongo:

$$S_i' = \frac{q}{\sqrt{2}},$$

obtengo:

$$A_P = \frac{A_C}{\sqrt{\frac{q^2}{2} + q^2}} = \frac{A_C}{\sqrt{\frac{3q^2}{2}}},$$

o sea:

$$A_P = \frac{A_C}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

En este caso será:

$$A_P = A_i = \frac{A_C}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (10)$$

Hemos dicho que los grados correspondientes a la intensidad son empíricos, pero en algunas relaciones han dado buen resultado, especialmente en la relación de Kövesligethy, introduciendo en ella los grados correspondientes a los grados de intensidad de la escala empírica de Cancani, como veremos más adelante.

Como se sabe, los elementos más importantes que determinan el poder destructivo de un terremoto a igualdad de otras condiciones, son el período y la amplitud de onda, elementos de los cuales depende la aceleración máxima.

Estos elementos están ligados por las relaciones

$$A = \frac{4\pi^2 a}{T^2},$$

en la cual a representa el doble de la amplitud de las vibraciones del suelo, T el doble período, A la aceleración máxima.

La amplitud de onda y el período no pueden determinarse más que por medio de los sismógrafos, prácticamente se puede también en algunos casos determinar la amplitud de onda, conociendo preventivamente cuál sería el desplazamiento mínimo que debería sufrir un cierto cuerpo para que este cuerpo efectúe un determinado movimiento.

En la cuarta reunión de la Comisión permanente de la Asociación internacional de sismología, en Manchester, del 18 al 29 de julio de 1911, el príncipe de Galitzín, el gran sismólogo ruso, dió una lección con el objeto de proponer una escala dinámica experimental, apta para substituir a las actuales escalas de intensidad, que, como he dicho, son empíricas.

El principio basa sobre el volcamiento de paralelepípedos rectangulares puestos en pie, todos de igual base, pero de diferentes alturas. El volcamiento de un paralepípedo, y no el del siguiente o del precedente, proporciona dos valores límites de la aceleración máxima.

La idea no es nueva, ni se debe atribuir entonces esta idea al príncipe de Galitzín, como comúnmente se cree, porque ya antes que por él fué aplicada un poco por todos, pero el príncipe de Galitzín ha introducido en el método algunas modificaciones aparentemente insignificantes, pero que tienen una grande importancia. Consiste esta modificación en el hacer apoyar los paralepípedos rectangulares en el suelo por medio de dos listones de bronce paralelos, contenidos en las dos caras mayores de las cuatro verticales que contiene el paralepípedo. Queda así, con esta modificación, mejor definido el eje de rotación del paralepípedo, y cuando éste ha recibido un empuje y oscile, su amplitud y su período disminuye rápidamente (el ensayo es fácil e instructivo) así rápidamente, que la amplitud no puede ser exagerada por la resonancia con los períodos del movimiento del suelo. Se tendrán en substancia en el paralepípedo, las condiciones de un rápido amortiguamiento, subsistiendo la proposición de que la relación entre dos amplitudes sucesivas es constante.

Por lo visto, el paralepípedo cae sólo si la aceleración ha sido la necesaria para que la relación de inercia vuelque el blok, y no para engrandecimientos debidos a resonancias. En la suposición que el movimiento del suelo sea armónico, sólo tiene influencia la aceleración sobre la caída de los bloks.

Los ensayos hechos con la plataforma oscilante, dijeron que realmente la aceleración del movimiento forzado, eran la determinante de la caída del paralepípedo. Variando la amplitud, para que se efectuara la caída, se necesitaba variar el período, y variarlo en tanto de modo que la aceleración quedara constante.

El docto conferenciante, príncipe de Galitzín, después que expuso la teoría del aparato, desarrolló los cálculos que le han permitido proporcionar las dimensiones de los paralepípedos correspondientes con los diferentes grados de la escala sísmica.

La aproximación entre los valores observados y calculados es buena. En la práctica se buscarán paralepípedos de una madera homogénea en cuanto sea posible, ancho dos centímetros y largo once, que se dispondrán en pie sobre listones de bronce, altos dos milímetros de la base.

Con respecto a la altura, hemos visto que ésta deberá variar de paralepípedo a paralepípedo, debiendo ser para el volcamiento tanto mayor, cuanto más pequeña es la intensidad con la cual ese paralepípedo está investido. La altura correspondiente a la aceleración máxima correspondiente al volcamiento, se puede ver en la siguiente tabla :

H (Altura de los paralepípedos)	A (Aceleración máxima correspondiente al volcamiento)
7.9 cm	200 cm/s
8.9	180
10.0	160
11.5	140
13.5	120
16.3	100
20.4	80
27.4	60
41.3	40
82.9	20

De la aceleración máxima de volcamiento del paralepípedo se puede después, sin mas, obtener la intensidad correspondiente, de la siguiente tabla de Cancani :

	G (grado)	A (acel. máx.)
I................	0 mm	2.5 mm/s
II...............	2.5	5
III..............	5	10
IV..............	10	25
V...............	25	50
VI..............	50	100
VII.............	100	250
VIII............	250	500
IX..............	500	1000
X...............	1000	2500
XI..............	2500	5000
XII.............	5000	10000

En las relaciones :

$$A_p = \frac{A_c}{\sqrt{S^2 + q^2}} \qquad y \qquad A_i = \frac{A_c}{q}\sqrt{\frac{2}{3}},$$

la cantidad A_C que representa la aceleración máxima en el hipocentro, nosotros no podemos medirla, se comprende. Volveremos, por lo tanto, a la relación :

$$\frac{A_0}{A} = \frac{r}{q} = \frac{\sqrt{S^2 + q^2}}{q},$$

de la cual obtengo :

$$q = \frac{AS}{\sqrt{A_0^2 - A^2}} = \frac{A_i S_i'}{\sqrt{A_0^2 - A_i^2}};$$

y para el punto de inflexión, siendo

$$q = S_i' \sqrt{2},$$

tendremos :

$$S_i' \sqrt{2} = \frac{A_i S_i'}{\sqrt{A_0^2 - A^2}},$$

de la cual obtengo sucesivamente :

$$\frac{A_i}{\sqrt{A_0^2 - A_i^2}} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad A_i = A_0 \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{11}$$

relación que más rápidamente se puede obtener de la (10), siendo

$$\frac{A_C}{q} = A_0,$$

relación ésta que permite calcular la aceleración máxima de inflexión, cuando se conoce el valor de la aceleración en el epicentro.

Más arriba hemos visto que es preferible en los cálculos usar la aceleración máxima en lugar de la intensidad (porque éstas son representadas por escalas empíricas, mientras que los valores correspondientes a la aceleración máxima podemos apreciarla con más exactitud), con excepción de una relación (dicha de Cancani-Kövesligethy), la cual da muy buen resultado, y que liga las aceleraciones con el grado de intensidad.

$$G_0 - G = 3 \log_{10} \frac{A_0}{A}, \tag{12}$$

en la cual G_0 y A_0 son respectivamente los grados de intensidad de la escala Cancani en el epicentro, y G y A representan los valores de los mismos elementos en una estación cualquiera.

En otra de mis memorias, transformando oportunamente las relaciones Cancani-Kövesligethy (transformación muy simple y que facilita mucho los cálculos, que fué publicada por primera vez en 1913 por la *Revista Astronómica de España y América*, y comentada después muy favorablemente por el *Boletín de la Sociedad Sismológica Italiana*, obtuve:

$$q = \frac{S}{\sqrt{10^{\frac{2}{3}(G_0 - G)} - 1}};$$

donde G representa el grado de intensidad de la escala Cancani en la distancia epicentral S, correspondiente a una aceleración máxima A, y G_0 el grado de intensidad en el epicentro correspondiente a la aceleración A_0.

Substituirá, por lo tanto, también la siguiente:

$$q = \frac{S}{\sqrt{10^{\frac{2}{3}(G - G_i)} - 1}}.$$

donde G_i es el grado de intensidad correspondiente a la distancia de inflexión de la misma intensidad. Por consiguiente tendremos:

$$\frac{S_i}{\sqrt{10^{\frac{2}{3}(G_0 - G_i)} - 1}} = S_i\sqrt{3};$$

y con sucesivas transformaciones obtengo:

$$G_0 - G_i = \frac{3}{2}\log_{10} \cdot \frac{4}{3};$$

y, en fin:

$$G_i = G_0 - 0{,}187. \qquad (13)$$

Se ve que en el punto de inflexión el grado de intensidad es muy poco diferente al grado del epicentro-punto, y también del epicentro-zona; a más razón será que todos los demás puntos de una zona epicentral tendrán la misma intensidad que el epicentro-punto, lo que viene a comprobar una vez más que el epicentro-punto en la naturaleza no existe, debiéndolo solamente considerar como una mera abstracción matemática para facilitar los cálculos.

Por consiguiente, todos los puntos de la zona epicentral deberán estar representados por las isosistas del mismo grado; todo esto se

comprende, siempre que no se tenga en cuenta el coeficiente de absorción, que por mínimo que sea en los subsuelos compactos, formados por rocas arcaicas muy elásticas, como los granitos, pórfidos, dioritas, etc., sin embargo, especialmente para terremotos muy fuertes, la absorción no es despreciable, y por consiguiente, desde el punto central de la zona epicentral hasta el punto de inflexión de la intensidad, la diminución de ésta, debida a la absorción del medio, no debe despreciarse; así que será sensible la diferencia entre el valor del grado de la isosista epicentral, y el valor del grado de la isosista de inflexión.

A más razón no debe despreciarse la variación debida a esta absorción en los subsuelos incoherentes, poco compactos, arenosos, etc., en los cuales la absorción adquiere sus valores máximos.

Volviendo a nuestro argumento, hemos obtenido las relaciones :

$$S_i = \frac{q}{\sqrt{3}} \qquad \text{y} \qquad S_i' = \frac{q}{\sqrt{2}}.$$

Ahora admitamos que q como máximo adquiere un valor de 60 kilómetros (valor que nunca podrá alcanzar. Ver mi memoria *Determinación de la profundidad de la costra terrestre con elementos sismológicos)*, se ve que tanto S_i como S_i' no llegan a 45 kilómetros, así que prácticamente esos dos puntos se pueden considerar pertenecientes a la zona epicentral.

Y ahora venimos a la absorción del medio.

Sea B el valor de las aceleraciones medidas (que supondremos medida rigurosamente, obteniendo un valor muy exacto, o por lo menos muy cercano al verdadero, cosa muy difícil de obtener aún con los paralepípedos de Galitzín), en P, y A el valor que tendría esa aceleración haciendo caso omiso de la absorción del medio. Evidentemente será $A > B$ y entonces será $A - B = \alpha$ siendo α el valor de la aceleración perdida desde C hasta P a lo largo de la CP debido a la absorción del medio (fig. 1).

Siendo :

$$A = A_0 \frac{q}{r},$$

será :

$$B = A - \alpha = A_0 \frac{q}{r} - \alpha;$$

o sea :

$$B = \frac{A_0 q - r\alpha}{r},$$

siendo A_0 la aceleración máxima en el epicentro, no calculando la pérdida debida a la absorción del medio, y llamando con ς el valor de la absorción medio kilómetro a lo largo de la CP desde C hasta P, será evidentemente :

$$\varsigma = \frac{\alpha}{r},$$

y de la

$$rB = A_0 q - r\alpha,$$

obtengo :

$$\alpha = \frac{A_0 q - rB}{r},$$

y siendo

$$\varsigma = \frac{A - B}{r} = \frac{\alpha}{r},$$

tendré :

$$\varsigma = \frac{A_0 q - rB}{r^2}.$$

Para distancias no demasiado grandes, tendremos :

$$r^2 = S^2 + q^2,$$

y por lo tanto será :

$$\varsigma = \frac{A - B}{\sqrt{q^2 + S^2}} = (A - B)(q^2 + S^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Haciendo la derivada segunda de esta función obtengo :

$$\frac{d^2\varsigma}{dS^2} = (A - B) \cdot \frac{1}{(S + q^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{3S^2}{S^2 + q^2} - 1 \right\};$$

y

$$\varsigma \frac{d^2\varsigma}{dS^2} = \frac{(A - B)^2}{(S + q^2)^2} \left\{ \frac{3S^2}{S^2 + q^2} - 1 \right\}. \qquad (14)$$

Siendo $A > B$, será $\frac{(A - B)^2}{(S^2 + q^2)^2}$ siempre positiva; mientras el otro factor $\left(\frac{3S^2}{S^2 + q^2} - 1\right)$ podrá ser positivo o negativo según que

$$\frac{3S^2}{S^2 + q^2} - 1 \gtrless 0,$$

o lo que es lo mismo según que

$$2S^2 - q^2 \gtrless 0.$$

Ahora para que $2S^2 - q^2$ sea menor de cero, o sea :

$$2S^2 - q^2 < 0,$$

deberá ser :

$$S > \frac{q}{\sqrt{2}};$$

y por lo tanto para todos los valores de S comprendidos entre cero y $\frac{q}{\sqrt{2}}$, la expresión $\left(\frac{3S^2}{S^2 + q^2} - 1\right)$ es y se mantiene negativa, y la curva de la absorción entre estos dos límites es y se mantiene cóncava. Es decir, la curva se mantiene cóncava para todos los valores de S comprendidos entre el epicentro (cero) y

$$D_i = \frac{q}{\sqrt{2}},$$

(llamando con D_i la distancia epicentral correspondiente a la inflexión de la curva de la absorción).

Para

$$S < \frac{q}{\sqrt{2}},$$

la fracción $\frac{3S^2}{S^2 + q^2} - 1$ se vuelve y se mantiene siempre positiva, y positiva se volverá también la $\varphi \frac{d^2\varphi}{dS^2}$; y por consiguiente la curva será convexa.

Para

$$S = \frac{q}{\sqrt{2}},$$

la $\varphi \frac{d^2\varphi}{dS^2}$ se anula, y por consiguiente a esta distancia la curva presentará un punto de inflexión.

Substituyendo en la función primitiva

$$\varphi = \frac{A - B}{r_1} = \frac{A - B}{\sqrt{S^2 + q^2}},$$

el valor

$$D_i = \frac{q}{\sqrt{2}}$$

en lugar de S, obtengo :

$$\rho = \frac{A - B}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Este valor representa la absorción medio kilométrica a lo largo del radio sísmico que emerge a la distancia epicentral D_i.

Si en la

$$\rho = \frac{A - B}{\sqrt{q^2 + S^2}}.$$

hago $S = 0$, obtengo :

$$\rho = \frac{A - B}{q},$$

que representa el valor de la absorción medio kilométrica desde el hipocentro hasta el epicentro.

Para ilustrar lo expuesto, tomaremos el terremoto de Owari, del 28 de octubre de 1891, ya mencionado en otros trabajos.

Para ese terremoto Omori calculó la profundidad del hipocentro en 15.5 kilómetros, y aplicando las relaciones ya expuestas obtengo 15.6.

La aceleración máxima en el epicentro fué calculada por Omori experimentalmente con un valor mayor de 4300 milímetros por segundo; y aplicando las relaciones expuestas obtuve 4370 milímetros por segundo. La concordancia es bastante sensible y, por lo tanto, poniendo en juego los valores $A_0 = 4370$ mm/seg, $S = 270$ km. (Distancia epicentral de Tokio) y B (Tokio) $= 230$ mm/seg, obtuve :

$$q = 15.6, \qquad \rho = 0.083 \text{ mm} \qquad \text{y} \qquad \frac{\alpha}{R} = 0.0036,$$

es decir, entre el hipocentro y Tokio el valor medio kilométrico de la absorción está representado por 0.083 milímetros por segundo, y el coeficiente de absorción está representado por 0.0036.

Consideremos otro caso. El terremoto Siculo-Calabro de 1908.

En otros trabajos he determinado respecto a dicho terremoto los siguientes valores : $A_0 = 2000$ mm/seg. Distancia media epicentral la isosista VI 86.4 km, $q = 9$. Con estos elementos obtuve :

$$\rho = 1.5 \text{ mm/seg} \qquad \text{y} \qquad \frac{\alpha}{R} = 0.0209.$$

El doctor Oddone obtuvo en el estudio de este terremoto

$$\frac{\alpha}{R} = 0.0204.$$

Así que para el terremoto de Owari hemos obtenido

$$\alpha = 0.0036,$$

es decir, estamos en el orden de los milésimos, y para el terremoto Siculo-Calabro hemos obtenido

$$\alpha = 0.0204,$$

es decir, en el orden de los centésimos.

¡Qué diferencia enorme entre el valor de estos dos coeficientes de absorción! El relativo al terremoto de Owari nos dice que las rocas del subsuelo eran duras, arcaicas, compactas y elásticas, y por lo tanto la pérdida debida a la absorción del medio era muy pequeña, mientras que el relativo al Siculo-Calabro nos dice que el coeficiente de absorción fué muy grande, porque el subsuelo estaba formado de materiales incoherentes, desgregables, poco compactos, poco o apenas elásticos.

Se ve de lo expuesto, que los estudios y las investigaciones de los valores de los coeficientes de absorción del medio tienen un gran valor con respecto especialmente en los puntos ubicados en las zonas epicentrales e inmediatamente adyacentes, es decir, para las zonas comprendidas entre las dos isosistas más altas.

Los valores de esos coeficientes podrán proporcionarnos un criterio muy valioso acerca de la constitución del subsuelo correspondiente o dichas zonas epicentrales, porque está a la vista que cuanto más duro, compacto, elástico y coherente es dicho subsuelo, tanto menor será el valor de dicho coeficiente; mientras que con respecto a un subsuelo incoherente y poco elástico, tanto mayor será el valor del mismo coeficiente.

Y si para algunos puntos epicentrales resultara un coeficiente de absorción extremadamente pequeño, se deberá pensar que existe un subsuelo eminentemente metálico, quiero decir, un subsuelo rico en yacimientos metálicos, especialmente en su estado nativo.

¡Qué gran utilidad presentaría si se encaminaran los estudios de la geofísica, y especialmente de la sismología en este sentido, y también con explosivos y con sismógrafos portátiles en nuestro país, es-

pecialmente en las zonas de altas actividades sísmicas, como Mendoza y San Juan, y en todos los puntos donde haya manifestaciones volcánicas primarias o secundarias!

Estas investigaciones no sólo serán de utilidad para el geofísico y el sismólogo, sino también para el ingeniero que busca lo productos del subsuelo; porque la variación de conductibilidad de las ondas sísmicas, la variación del grado geotérmico, la variación del coeficiente de absorción; la forma y superficie de la isosista, la variación de la presión de los vapores emanantes de las fumarolas y soffiones, pueden proporcionar a dichos ingenieros criterios para el cateo de los productos minerales que nos esconde la costra terrestre.

Ya es hora que con respecto al estudio de la geofísica, y especialmente de la meteorología y de la geodinámica tanto desde el punto de vista científico como en el de la práctica, nos pongamos en esta senda con estudios serios de investigación, dejando en lugar secundario los métodos antiguos y rutinarios que, como ya sabemos, nos proporcionan muy mezquinos resultados.

Por lo tanto, nuestro país debe ponerse a la altura de los demás, donde se estudia con empeño la geofísica, para poder así por el honor de la Argentina y por el adelanto de la geofísica en algunos años ponernos al nivel de los demás países.

Puesto que aquí tratamos de un ramo de la geofísica, o mejor de la geodinámica, me pregunto : ¿Por qué hasta la fecha, a pesar de los votos del Congreso de Buenos Aires de 1910 y de otros empujes y estímulos que nos llegan desde Europa y Norte América, todavía no se organizó una verdadera red sísmica, como la tiene Chile y otros países de Sud América? ¿Por qué no se inician en este ramo las investigaciones en nuestro país; en las zonas andinas más castigadas por los terremotos, encaminando las investigaciones para determinar los elementos sísmicos, sea desde el punto de vista de la sismologia pura, sea desde el punto de vista de la sismo-ingeniería, aportando nuestro contributo a los estudios de la sismología nacional y mundial?

En la Argentina, en su vasta extensión hay diseminados algunos estudiosos de sismología, que reunidos podrían dar un buen impulso a esos estudios, y también respecto a los estudios de los demás ramos de la geofísica. ¿Por qué la autoridad nacional no crea con espíritu altamente patriótico el órgano, oficina o instituto, como quiera llamarse, que a todos los vincule, y al coordenar y centralizar sus tra-

bajos, los haga converger en bien y progreso de la ciencia universal?

Estos son los anhelos y los votos con que cierro la presente memoria, esperando verlos realizados en un día no muy lejano.

Agradezco a mi colaboradora, señora Rosa Lauberer de Kern por su cooperación, no sólo en la inteligente búsqueda a través de libros y revistas de los valores numéricos que me sirvieron para poner en relieve cuanto expongo, sino también en la compilación misma del trabajo para poderlo presentar en forma a la Sociedad Científica Argentina para su publicación en los *Anales* de la misma.

Buenos Aires, 25 de marzo de 1926.

LAS LATITUDES CRECIENTES CONSIDERADAS COMO LOGARITMOS

Y SUS PRINCIPALES APLICACIONES

ESPECIALMENTE A LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DEL TRIÁNGULO DE POSICIÓN

POR ÁNGEL PÉREZ

Introducción

En nuestro anterior trabajo sobre las *líneas* y *funciones versas* de Mendoza y sus principales aplicaciones a la resolución de los problemas astronómicos del triángulo de posición, publicado en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo LXXIX, página 289 y siguientes, se habló incidentalmente de las nuevas funciones goniométricas que se conocen con el nombre de *lambdas* y *colambdas.*

Ellas no vienen a ser otra cosa que las *latitudes crecientes,* de antiguo conocidas, puesto que su descubrimiento se atribuye a Gerardo o Nicolás Kauffmann (Mercator) en 1569, al inventar las *cartas esféricas o reducidas,* usadas por todos los marinos.

A decir verdad, esa invención trascendental le ha sido discutida por varios de sus contemporáneos, entre otros, por Henry Wright; quien, según Mendoza, fué el primero que calculó una tabla de *latitudes crecientes.* Modernamente se atribuye el invento al matemático portugués Pedro Nunes o Nunhes, quien parece tratara de la *loxodromía* en alguna de sus obras que vió la luz en 1537 (1).

Las *latitudes crecientes* o *partes meridionales* de los marinos españoles son el elemento fundamental para la construcción de las *cartas*

(1) Deseando cerciorarme de la exactitud de esa afirmación, consulté el *Tratado de la esfera* del celebre inventor del *nonio,* en la biblioteca de la Universidad de Salamanca, en 1924, sin poder hallar noticia concreta de ello, pero sí varios planos y trazados que recuerdan vagamente la configuración de la *curva* llamada *loxodriomica* por los marinos. *(Nota del autor.)*

marinas, y se han calculado, ya considerando la tierra como esférica, ya como elipsoide de revolución al rededor de su eje menor.

De esta última especie son las tabuladas por el ilustre ex director de nuestra Escuela Naval y exprofesor de las Universidades de Buenos Aires y La Plata, don Francisco Beuf, ha muchos años fallecido.

No se había hecho más que esa aplicación de las *latitudes crecientes*, hasta una época relativamente moderna, hasta los trabajos emprendidos en el profesorado de la Escuela Naval francesa por Mr. Guyou. El algoritmo atribuído a Mercator fué el fundamento que con la teoría de los círculos y rectas de altura permitieran a Mr. Guyou idear un método de situación en el mar, que describe en un opúsculo aparecido en 1884 y que tituló *Tables de poche donnant le point observé et les droites de hauteurs*.

Esta obrita, conocida por el profesor Pastor, y que menciona y utiliza en parte en su *Tratado de Navegación* (impreso por Coni Hnos., 1896, 1898), es, se dice, tan concisa que sólo con gran trabajo de investigación pudo extender el método el profesor de la Escuela Naval española, don José A. Barreda, a la resolución de otros problemas, a más del de la determinación del *horario* y del *azimut*, que es el que sobre todo ocupa a Mr. Guyon [1].

Barreda publicó, en 1897, en El Ferrol, una obra titulada *Nuevos procedimientos de navegación astronómica*, la que llegó a nuestras manos hace mucho tiempo. La hemos leído con detención y comentado con amplitud, ofreciendo hoy a nuestros lectores, a más de doctrinas de tan meritoria obra, el fruto de nuestras meditaciones, condensado en variados procedimientos para mejorar unas veces y variar otras, métodos de cálculo, los que tratamos de vulgarizar, facilitando su práctica con nuevas tablas que hemos calculado, y de que ofrecemos una muestra en el presente trabajo.

I

Origen y significado del algoritmo atribuído a Nicolás Kauffmann (Mercator)

1. Sabido es que la *distancia mínima* èntre dos puntos de la superficie terrestre, considerada como esférica, es el arco menor de círculo

(1) El autor de este trabajo, a pesar de muchas diligencias y aun de personarse en la casa editora de París, no ha logrado leer las *Tables de poche* de Mr. Guyon.

máximo que une dichos puntos. A esta distancia le aplican los marinos el calificativo de *ortodrómica,* así como a la navegación en que se sigue el arco de círculo máximo.

No siempre puede recorrerse la *derrota* o ruta que marca el arco de círculo máximo; bien porque éste llegue a pasar por altas latitudes que expondrían el buque a peligrosos contratiempos, bien porque ella se aparte de corrientes o vientos que pudieran impulsar la nave en dirección favorable para alcanzar el puerto de destino.

Por otra parte, la navegación ortodrómica, seguida con todo rigor, obliga a un continuo cambio del ángulo de *rumbo,* operación molesta para las prácticas marineras.

Más cuando es solo este inconveniente el que se opone al seguimiento del arco de círculo máximo, se le soslaya, modificando el rumbo a ciertos intervalos que se navegan por pequeñas *loxodromías,* es decir, siguiendo direcciones que forman un *ángulo constante* con los meridianos atravesados en la derrota durante cada uno de esos intervalos.

2. Importa pues, establecer la *ecuación de la curva loxodrómica sobre la Tierra considerada como esférica.*

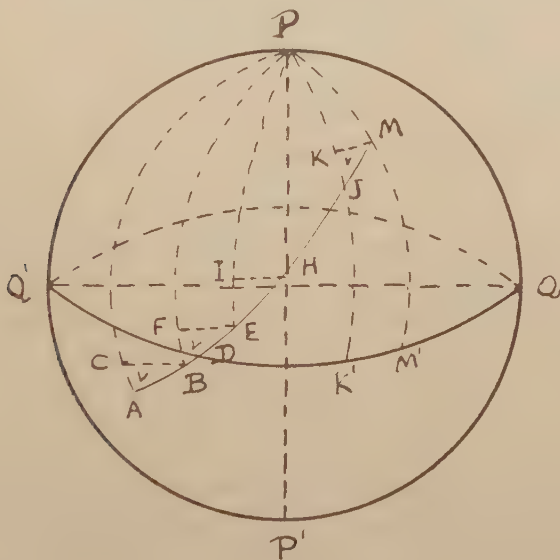


Figura 1

Sean : PQP′Q′ (fig. 1) la esfera terrestre proyectada sobre un meridiano, A y M los puntos de salida y llegada conocidos por sus lati-

tudes l, l' y su longitudes g, g', AM la *derrota loxodrómica,* es decir, tal que corta bajo un ángulo invariable V a todos los meridianos que atraviesa.

Nos proponemos hallar una relación entre las latitudes y longitudes de los puntos A y M y el ángulo constante V que la curva ABD ... M forma con los meridianos.

Para ello, imaginaremos dividida la derrota en un número n muy grande de partes iguales; cada una de ellas, por ejemplo, AB, será por consiguiente, muy pequeña: y si suponemos trazados los arcos de meridiano y paralelo correspondientes a cada una de esas porciones iguales

$$AB = BE = EH = ... = JM$$

quedará formada una multitud de triángulos rectángulos, cuya pequeñez nos permitirá considerarlos como rectilíneos; además, como en ellos es constante el ángulo V y las hipotenusas son iguales, tales triángulos serán idénticos o congruentes:

$$\Delta\, ABC = \Delta\, BEF = \Delta\, EHI = ... = \Delta\, JMK.$$

Tendrán, por tanto, iguales los elementos según los meridianos:

$$AC = BF = EI = ... = JK$$

que designaremos por Δl, y según los paralelos

$$BC = EF = HI = ... = MK$$

que denotaremos con Δa. A este ultimo elemento, llamado *apartamiento* o camino este oeste, por los marinos, debemos convertirlo en elemento de longitud.

Desde luego tenemos, que:

$$\begin{aligned} BC = \Delta l \,.\, \mathrm{tg}\, V, \qquad EF = \Delta l \,.\, \mathrm{tg}\, V, \\ HI = \Delta l \,.\, \mathrm{tg}\, V \;...\; MK = \Delta l \,.\, \mathrm{tg}\, V. \end{aligned} \qquad (1)$$

3. Existe una relación fácil de investigar entre el *apartamiento* y la *diferencia en longitud,* o sea entre el arco de paralelo y el arco semejante de ecuador en la hipótesis de la esfericidad de la Tierra.

Sea AB (fig. 2) el arco de paralelo y A′B′ el arco semejante de ecuador. Según la geometría, tenemos:

$$AB : A'B' = OA : O'A' \qquad (2)$$

o bien

$$\Delta a : \Delta g = r : R$$

representando por Δa el arco de paralelo y por Δg el arco semejante de ecuador.

Proyectando sobre el plano del ecuador el radio OA del paralelo, la longitud O′D de la proyección, será igual a r y el Δ O′AD da para su valor

$$O'D = O'A \cos AO'D,$$

es decir,

$$r = R \cos l, \tag{3}$$

designando por l el ángulo AO′A′, latitud del paralelo.

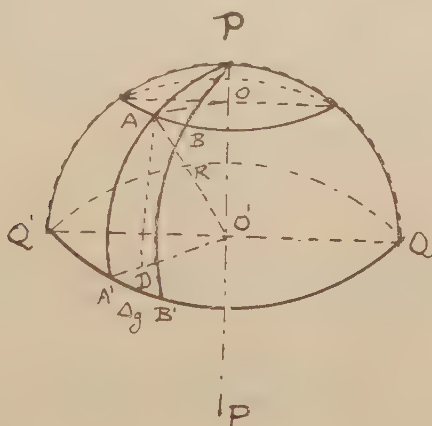


Figura 2

De la (3) llevada a la (2) sale :

$$\Delta a : \Delta g = R \cdot \cos l : R, \tag{4}$$

$$\Delta g = \frac{\Delta a}{\cos l}, \tag{5}$$

$$\Delta a = \Delta g \cos l. \tag{6}$$

Llevando este valor y los correspondientes a las relaciones (1) tendremos :

$$BC = \Delta g \cos (l + \Delta l), \qquad EF = \Delta g \cos [l + 2\Delta l],$$

$$MI = \Delta g \cos [l + 3\Delta l] \ldots MK = \Delta g \cos l' = \Delta l \operatorname{tg} V,$$

y todos los segundos miembros iguales a $\Delta l \operatorname{tg} V$.

Deduciendo de aquí los elementos Δg, será :

$$\Delta g = \frac{\Delta l}{\cos(l + \Delta l)} \operatorname{tg} V, \qquad \Delta g = \frac{\Delta l}{\cos[l + 2\Delta l]} \operatorname{tg} V,$$

$$\Delta g = \frac{\Delta l}{\cos[l + 3\Delta l]} \operatorname{tg} V, \qquad \Delta g = \frac{\Delta l}{\cos[l + (n-1)\Delta l]} \operatorname{tg} V, \qquad (7)$$

$$\Delta g = \frac{\Delta l}{\cos l'} \operatorname{tg} V.$$

Es evidente que la suma de los primeros miembros de (7) da la diferencia de longitud entre los puntos de llegada y salida, así como que l' y l representan las latitudes de los mismos puntos, luego se tendrá :

$$g' - g = \Delta l \left[\frac{1}{\cos[l + \Delta l]} + \frac{1}{\cos[l + 2\Delta l]} + \frac{1}{\cos[l + 3\Delta l]} + \dots + \frac{1}{\cos l'} \right] \operatorname{tg} V. \qquad (8)$$

4. Llamase *latitud creciente* o *aumentada* de l, y se representa por l_c o l_a, una expresión de la forma :

$$l_c = \Delta l \left[\frac{1}{\cos \Delta l} + \frac{1}{\cos 2\Delta l} + \frac{1}{\cos 3\Delta l} + \dots + \frac{1}{\cos l} \right]. \qquad (9)$$

Según esto, es evidente que :

$$\Delta l \left[\frac{1}{\cos[l + \Delta l]} + \frac{1}{\cos[l + 2\Delta l]} + \frac{1}{\cos[l + 3\Delta l]} + \dots + \frac{1}{\cos l'} \right] = l_c' - l_c. \qquad (10)$$

Llevando este valor a la expresión (8) viene a ser :

$$g' - g = [l_c' - l_c] \operatorname{tg} V \qquad \text{[ecuación de la loxodromía].} \qquad (11)$$

Si se considera el punto en que la loxodromía encuentra al ecuador, es decir, si suponemos que el punto inicial es el D (fig. 1), entonces será

$$l = 0 \qquad \text{y} \qquad g = g_0,$$

designando por g_0 la longitud del punto de intersección de la curva con el ecuador, y la ecuación (11) viene a ser :

$$g' - g_0 = l_c' \operatorname{tg} V \qquad \text{o} \qquad g' = l_c \operatorname{tg} V + g_0. \tag{12}$$

Tal será la ecuación de la loxodromía sobre la esfera.

Expresando los arcos en minutos debemos escribirla :

$$g' = \frac{1}{\operatorname{sen} 1'} l_c' \operatorname{tg} V + g_0'. \tag{13}$$

5. Antes de pasar adelante debe expresarse en términos finitos la fórmula de l_c. Para ello, recordemos que Δl es un arco muy pequeño que podemos considerar como el elemento diferencial dl de la latitud; luego el problema comporta la integración de $\frac{dl}{\cos l}$, por tanto :

$$l_c = \int \frac{dl}{\cos l}.$$

Esta expresión puede escribirse :

$$\frac{dl}{\cos l} = \frac{dl \, . \cos l}{\cos^2 . \, l} = \frac{d \, . \operatorname{sen} l}{\cos^2 l} = \frac{d \operatorname{sen} l}{1 - \operatorname{sen}^2 l}, \tag{1}$$

luego :

$$\int \frac{dl}{\cos l} = \int \frac{d \, . \operatorname{sen} l}{1 - \operatorname{sen}^2 l}.$$

Para facilitar la integración ponemos $\operatorname{sen} l = x$, y así $d \, . \operatorname{sen} l = d \, . \, x$, por tanto la (1) equivale a $\frac{dx}{1 - x^2}$, y el problema se reduce a descomponer en dos fracciones, la relación :

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - x} \tag{2}$$

en que A y B son dos incógnitas que hay que determinar.

Multiplicando la (2) por $1 + x$, viene :

$$\frac{1}{1 - x} = A + \frac{B(1 + x)}{1 - x}; \tag{3}$$

la que debiendo ser cierta para cualquier valor finito de x, lo será si hacemos $x = -1$.

En esta hipótesis se anula el factor del numerador que acompaña a B en (3), y obtenemos :

$$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Multiplicando ahora la (2) por $1-x$, sale

$$\frac{1}{1+x}=\frac{A(1-x)}{1+x}+B,$$

y haciendo $x=1$, se anula el factor $(1-x)$ de A, y viene para B :

$$B=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

luego :

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+x}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$$

y por tanto :

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{-dx}{1-x}=\frac{1}{2}l(1+x)-\frac{1}{2}l(1-x) \qquad (4)$$

$$=\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x},$$

y poniendo en vez de x y dx los valores sen l y d . sen l, será :

$$\int\frac{d\,\text{sen}\,l}{1-\text{sen}^2 l}=\frac{1}{2}l\frac{1+\text{sen}\,l}{1-\text{sen}\,l}. \qquad (5)$$

Esta expresión puede transformarse como sigue :

$$\frac{1+\text{sen}\,l}{1-\text{sen}\,l}=\frac{1+\cos(90^\circ-l)}{1-\cos(90^\circ-l)}=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}(90^\circ-l)}{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}(90^\circ-l)}$$

$$=\text{cotg}^2\left[45^\circ-\frac{l}{2}\right]=\text{tg}^2\left[45^\circ+\frac{l}{2}\right];$$

por tanto :

$$l_c = \int \frac{dl}{\cos l} = \frac{1}{2} l \,.\, \mathrm{tg}^2 \left[45° + \frac{l}{2}\right] = l \,.\, \mathrm{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right]. \qquad (6)$$

Si el arco l_c se expresa en minutos, viene :

$$l_c = \frac{1}{\operatorname{sen} 1'} l \,.\, \mathrm{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right]. \qquad (7)$$

Por tanto, la ecuación de la loxodromía viene a ser :

$$g' = \frac{1}{\operatorname{sen} 1'} l \,.\, \mathrm{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right] \mathrm{tg}\, V + g_0. \qquad (8)$$

Los diferentes valores de V y de g_0 distinguen entre sí a las varias loxodromías.

Suponiendo $V = 0$, la ecuación se convierte en $g' = g_0$, es decir, que todos los puntos de la loxodromía tienen la misma longitud, y por tanto, la curva es un meridiano.

Si hacemos $V = 90°$, la ecuación se ofrece bajo la forma :

$$g' = \infty + g_0.$$

Para ver de una manera clara lo que la ecuación representa realmente en ese caso, tomemos la integral definida entre los dos puntos M y M', cuyas coordenadas respectivas llamaremos l, g y l', g'; se tendrá :

$$g' - g = \mathrm{tg}\, V \left[l \,.\, \mathrm{tg}\left(45° + \frac{l'}{2}\right) - l \,.\, \mathrm{tg}\left(45° + \frac{l}{2}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{tg}\, V \,.\, l \frac{\mathrm{tg}\left[45° + \frac{l'}{2}\right]}{\mathrm{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right]},$$

que dividiendo por tg V y recordando que $\frac{1}{\mathrm{tg}\, V} = \mathrm{cotg}\, V$, será :

$$(g' - g)\, \mathrm{cotg}\, V = l \frac{\mathrm{tg}\left[45° + \frac{l'}{2}\right]}{\mathrm{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right]};$$

y poniendo en esta V = 90°, resulta :

$$o = l \frac{\text{tg}\left[45° + \frac{l'}{2}\right]}{\text{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right]}.$$

lo que implica que l' sea igual a l, y por tanto, la curva es en este caso un paralelo al ecuador.

Como la expresión $l \,.\, \text{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right]$ no depende más que de l, varía con ésta, más no proporcionalmente a ella; tales variaciones van en aumento a medida que crece l, y cuando ésta adquiere el valor de $\pm 90°$, $l \,.\, \text{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right]$ se vuelve $\pm \infty$. Esto indica que si se *gobierna* (mantiene la dirección de la nave) bajo un mismo ángulo de rumbo V (no siendo V = 0, ni V = 90°), nunca se llegaría al polo P, sino que se describirían una infinidad de espiras en torno de él y cada vez más estrechas.

6. Dijimos que para expresar en minutos los arcos desarrollados era necesario multiplicarlos por el sen 1'. En efecto, los arcos g y g_0 representan longitudes (largores); pero si queremos que las fórmulas precedentes den el número de *minutos*, por ejemplo, que corresponden al largor de esos arcos, debemos servirnos de la relación :

$$\frac{g\,(\text{largo})}{g\,(\text{en minutos})} = \frac{2\pi}{21600} = \frac{\pi}{10800} = \text{arc}.\,1' = \text{sen}\,.\,1',$$

de donde :

$$g\,(\text{en largo}) = \frac{\pi}{10800}\, g\,(\text{en minutos}),$$

$$= g\,(\text{en minutos})\ \text{sen}\ 1',$$

y por consiguiente, se tiene designando g en minutos por g' :

$$g' \frac{\pi}{10800} = \text{tg V}\,.\,l\,.\,\text{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right] + g_0 \frac{\pi}{10800},$$

de donde :

$$g' = \text{tg V}\,.\,\frac{10800}{\pi}\,l\,.\,\text{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right] + g_0';$$

y por tanto, las dos relaciones que intervienen en la loxodromía serán:

$$l_c = \frac{10800}{\pi} l \, . \, \mathrm{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2} \right] = \frac{1}{\mathrm{sen}\, 1'} l \, . \, \mathrm{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2} \right]$$

$$g = l_c \, \mathrm{tg}\, V + g_0$$

expresando l_c, g y g_0 números de minutos.

7. Los tratados de navegacion consideran también la ecuación de la loxodromia sobre el elipsoide, llegando a esta expresión para la latitud creciente evaluada en minutos de arco:

$$l_c = \frac{1}{\mathrm{sen}\, 1'} \left[l \, . \, \mathrm{tg} \left(45^\circ + \frac{l}{2} \right) - \frac{e}{2} \, l \, \frac{1 + e \, \mathrm{sen}\, l}{1 - e \, \mathrm{sen}\, l} \right],$$

en que e es la excentricidad de la elipse meridiana y l la latitud geográfica, que se rige por la vertical del lugar. Con esto la ecuación de la loxodromía viene a ser:

$$g = l_c \, \mathrm{tg}\, V + g_0$$

[g, l_c, g_0 deben expresarse en minutos].

Para los fines de nuestro estudio no necesitamos considerar estas últimas fórmulas.

II

Las latitudes crecientes en sí mismas. Su cálculo y aplicación más inmediata

Si en la relación

$$l_c = \frac{10800}{\pi} l \, . \, \mathrm{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2} \right]$$

hacemos variar a l desde 1′ hasta 89°59′, podremos componer una tabla conteniendo todas las latitudes crecientes que convienen a los diferentes valores de l. Como el logaritmo indicado por l en la expresión de l_c es un logaritmo neperiano, conviene para el cálculo transformarle en logaritmo tabular o vulgar.

Recordemos para ello que en dos sistemas diferentes de logaritmos la relación que existe entre los dos logaritmos de un mismo número,

es *constante*, e igual a la razón de sus respectivos módulos. Designemos, como es costumbre, por e la base neperiana. Debemos tener :

$$\frac{l \,.\, \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]}{\log \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]} = \frac{1 \text{ (módulo de Neper)}}{\log . e \text{ (módulo de Briggs)}},$$

luego

$$l \,.\, \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = \log \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] \cdot \frac{1}{\log e}. \qquad (\alpha)$$

Luego tenemos para calcular l_c la relación

$$l_c = \frac{10800}{\pi \log e} \log . \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]. \qquad (\beta)$$

Se sabe que

$$e = 2{,}7182818 \ldots$$

y por tanto

$$\log e = 0{,}434294 \ldots \qquad \text{o} \qquad \log e = M.$$

Para

$$\log \frac{10800}{\pi \log e} = 3{,}8984896 \ldots.$$

y por consiguiente :

$$\log . l_c = 3{,}8984896 + \log\left[\log \mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{l}{2}\right)\right].$$

Busquemos como ejercicio la latitud creciente de Buenos Aires, suponiendo que la geográfica sea 34°36′30″ S (antigua aduana) :

$$\log \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = \log . \mathrm{tg}\left[45^\circ + \frac{34^\circ 36' 30''}{2}\right] \qquad = 0{,}2799077$$

$$\log \frac{10800}{\pi \log e} = 3{,}8984896 \,.\, \log . \text{constante} \qquad = 3{,}8984896$$

$$\log . [\log \mathrm{tg}]\,[45^\circ + 17^\circ 18' 15''] = \log (0{,}2799072) = \bar{1}{,}4470149$$

$$\log . l_c = 3{,}3455045$$

$$l_c = 2215{,}66.$$

Operando sobre esta fórmula (β) hemos calculado nuestras *segundas tablas*, que dan las latitudes crecientes de 15 en 15 segundos de arco. Las de Guyou que se encuentran en la colección de tablas náuticas

de nuestro fallecido colega don Luis Pastor, las dan de minuto en minuto.

Las *primeras tablas* que compusimos eran de logaritmos tangentes con argumento de 20 en 20 segundos. Estas últimas pensamos mejorarlas y acaso imprimirlas.

Las tablas de latitudes crecientes en el elipsóide tienen importancia para la construcción de las *cartas marinas*, pero hemos visto prácticamente que no pueden emplearse en la resolución trigonométrica de los problemas de la navegación astronómica.

9. Mas si queremos darnos cuenta de la diferencia que entraña el cálculo de la latitud creciente por ambos medios, hallaremos el valor del término substractivo :

$$-\frac{e}{2\,\mathrm{sen}\,1'}\,l\,\frac{1+e\,\mathrm{sen}\,l}{1-e\,\mathrm{sen}\,l},$$

que adoptando logaritmos vulgares es :

$$\mathrm{E}=-\frac{e}{2\log e'\,\mathrm{sen}\,1'}\log\frac{l+e\,\mathrm{sen}\,l}{l-e\,\mathrm{sen}\,l}$$

representando aquí la base neperiana por e' para distinguirla de e, excentricidad.

Tomando para valor del aplanamiento ρ la cantidad $\frac{1}{292,26}$ (Beuf.), de la relación hallada en astronomía :

$$(1-\rho)^2=1-e^2$$

sacamos :

$$e=\frac{2415}{29226}.$$

Por tanto :

$$\mathrm{E}=\frac{2415}{58452\,\mathrm{sen}\,1'\log e'}\log\frac{29226+2415\,\mathrm{sen}\,l}{29226-2415\,\mathrm{sen}\,l}$$

$\mathrm{sen}\,l=0,56796,\qquad \mathrm{sen}\,1'=0,00029,\qquad \log e'=0,4342945$

$$\mathrm{E}=-\frac{2415}{7,3615}\log\frac{30597,62}{27854,38}=-\frac{2415}{7,3615}\cdot 0,04079$$

$$\log \mathrm{E}=\log 2,415+\log 0,04079-\log 7,3615$$

log 2415	$= 3,38292$
log 0,04079	$= \bar{2},61055$
log numerador	$= 1,99347$
log denominador	$= 0,86697$
log E	$= 1,12650$

$$E = 13'38$$

l_c de Buenos Aires	=	2215'66
E	= —	13'38
l_c elipsoidal	=	2202,28

El término correctivo es a lo sumo para altas latitudes de poco más de 23'.

10. El objeto principal de las *cartas hidrográficas* o marinas es el de representar la *derrota* de la nave, es decir, la *loxodromía,* por una línea recta, y además conservar el ángulo de una loxodromía cualquiera con los meridianos con idéntico valor que el que tiene en la esfera. También debe conservar la carta a los puntos del globo situados en ella la posición relativa que tienen en la Tierra.

Puesto que tanto los meridianos como los paralelos son loxodromías, deben estar representados por líneas, y como ellos se cortan en el globo perpendicularmente, también estas líneas deben ser perpendiculares entre sí en la representación plana.

Estas consideraciones nos llevan a concebir un cilindro recto circunscripto al ecuador y teniendo a esta línea por directriz. Es claro que todos los planos meridianos costarán a este cilindro según generatrices.

Desarrollando ahora este cilindro sobre un plano, suponiéndole abierto por la generatriz determinada por el *primer meridiano inferior,* el *ecuador* se desarrollará en verdadera magnitud según una línea recta, y los meridianos siguiendo rectas paralelas entre sí y perpendiculares al ecuador.

Pero todos los paralelos, de que el ecuador es un límite, deben estar representados por rectas, luego los paralelos serán rectas paralelas al desarrollo del ecuador.

Como la distancia entre dos meridianos tomada sobre cualquier paralelo en la representación, es igual a la que separa esos meridianos en el ecuador, resultarán ensanchadas las dimensiones en el sen-

tido de los paralelos; y a fin de conservar las posiciones relativas y que la ruta de la nave quede representada por una recta, será necesario ir acreciendo la distancia entre los paralelos a medida que aumenta la latitud.

Como la relación en el globo entre el arco de paralelo a y el semejante A de ecuador es

$$\frac{a}{A} = \frac{\cos l}{1}, \qquad a = A \cos l$$

y en la carta es

$$a = A, \qquad \frac{a}{\cos l} = a \sec l$$

será la expresión del aumento en el sentido del paralelo.

Este mismo aumento debemos dar a los grados de meridiano, de modo que las latitudes irán aumentando en la carta como las secantes de l, es decir, que la latitud de un punto del globo vendrá representada en la carta por :

$$l_c' = \Delta l \left[\frac{1}{\cos \Delta l} + \frac{1}{\cos 2\Delta l} + \frac{1}{\cos 3\Delta l} + \dots + \frac{1}{\cos (l' - \Delta l)} + \frac{1}{\cos l'} \right],$$

que es la expresión de la latitud creciente dada en (6) y (8).

Ya hemos dicho en la *introducción* que la descubierta de esta relación se atribuye a Mercator, pero que probablemente pertenece a Wright o a Pedro Nunhes, en 1537.

Nosotros, atendiendo a que Mercator vulgarizó ese conocimiento, llamaremos a la expresión

$$l_c = \frac{10800}{\pi \log e} \log . \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2} \right]$$

algoritmo de Mercator.

11. La relación

$$l_c = \frac{10800}{\pi} l . \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{5} \right] \quad (\text{n}° \, 6)$$

puede escribirse de este otro modo :

$$\frac{l_c \pi}{10800} = l . \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2} \right];$$

y si pasamos de los logaritmos neperianos a los números será :

$$e^{l_c \cdot \frac{\pi}{10800}} = \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right];$$

cuyo primer miembro equivale a :

$$\left[e^{\frac{\pi}{10800}}\right]^{l_c} = [e^{\text{arc}\,.\,1'}]^{l_c} = [e^{\text{sen}\,1'}]^{l_c},$$

por tanto :

$$[e^{\text{arc}\,.\,1'}]^{l_c} = \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right];$$

y volviendo a tomar logaritmos en el sistema vulgar

$$l_c\,[\log e^{\text{arc}\,.\,1'}] = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

$$l_c = \frac{\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]}{\log e^{\text{arc}\,.\,1'}}.$$

Pero vimos que

$$l_c = \frac{10800}{\pi \log e} \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right],$$

luego :

$$\frac{\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]}{\log e^{\text{arc}\,1'}} = \frac{10800}{\pi \log e} \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

o

$$\frac{1}{\log e^{\text{arc}\,1'}} = \frac{10800}{\pi \log e}; \qquad \log e^{\text{arc}\,1'} = \frac{\pi \log e}{10800} = \frac{\pi M}{10800},$$

luego :

$$l_c = \frac{\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]}{\frac{\pi M}{10800}} = \frac{10800}{\pi M} \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right].$$

Expresión que nos dice que la latitud creciente es el

$$\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

en la base $e^{\frac{\pi}{10800}} = e^{\frac{1}{R}} = e^{\text{arc}\,1'}$.

Ahora bien, el coeficiente $\frac{10800}{\pi}$ es el valor del radio en minutos [1], que es 3437,7 y

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{0,43429...} = 2,30259...,$$

de modo que el coeficiente total es aproximadamente igual a 7915,7.

Si llamamos, como lo ha hecho Guyou, λ a l_c, se tendría :

$$\lambda = \frac{3437,7}{0,43429...} \log \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right] = 7915,7 \log \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right].$$

Esta última expresión es la que ha tabulado Mr. Guyou con el nombre de *lambdas*. Lo mismo ha hecho con la expresión $(90° - \lambda)$ cuyos valores ha llamado *colambdas*, designándolos respectivamente por λ y coλ o cλ.

Las tablas de Guyou de las que daremos una muestra, tienen la ventaja de ocupar pocas páginas y de formar parte de algunas colecciones de tablas náuticas, como la del profesor Pastor.

12. El marino, señor Barreda, en España, las ha calculado en la base decimal, de modo tal, que pueden emplearse las tablas trigonométricas de logaritmos tangentes dispuestas de un modo conveniente. Ha empleado cinco cifras de mantisa, lo que es suficiente para la mayoría de los cálculos.

He aquí como ha procedido Barreda :

Hemos visto que la relación

$$l_c = \frac{10800}{\pi} l \, . \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right] = \frac{1}{\operatorname{sen} 1'} l \, . \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right]$$

[1] Que se calcula por la proporción :

$$\pi R : 180°60' = R : x', \; x' = \frac{180°60'}{\pi = 3,14159...} = \frac{10800'}{\pi}$$

$$x' = r' \; (r \text{ en minutos}) = 3437,7.$$

Así se obtiene :

$$l_c = \lambda = \frac{3437,7}{M = 0,43429} \log \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right]$$

o

$$\lambda = 7915,7 \log \operatorname{tg} \left[45° + \frac{l}{2}\right].$$

se transformaba al substituir los logaritmos neperianos por los vulgares y al expresar l_c en minutos de arco, en la fórmula equivalente :

$$l_c = \frac{1}{\text{sen } 1' . \log e} \log \text{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2}\right].$$

Si para mayor comodidad de escritura llamamos C a la parte constante $C = \frac{1}{\text{sen } 1' . \log e} = 7915,87...$, tendremos que la latitud creciente o aumentada, será :

$$l_c = C . \log \text{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]. \qquad (\alpha)$$

Si prescindiéramos de la constante C, la nueva ecuación

$$l'_c = \log \text{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] \qquad (\alpha')$$

tendría mucha analogía con la (α) concibiéndose que podrá substituirla cuando no necesitemos hacer intervenir la constante C.

Pues bien, designando a esta nueva especie de latitud creciente l'_c con el nombre de *lambda* y representándola por $\lambda(l)$, tendremos :

$$\lambda(l) = \log \text{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2}\right],$$

y por tanto

$$l_c = C . \lambda(l).$$

Designaremos con el nombre de *colambda* de una cierta latitud l a la *lambda* del complemento de l, es decir, a $\lambda(90^\circ - l)$, o sea al logaritmo vulgar de

$$\text{tg} \left[45^\circ + \frac{90^\circ - l}{2}\right] = \text{cotg} \frac{l}{2},$$

y representaremos ese nuevo logaritmo por

$$\text{co}\lambda(l) \qquad \therefore \qquad \text{co}\lambda(l) = \log \text{tg} \left[45^\circ + \frac{90^\circ - l}{2}\right]. \qquad (\beta)$$

Tendremos la expresión complementaria de l_c, escribiendo :

$$(90^\circ - l)_c = C \log \text{cotg} \frac{l}{2} = C \text{ co}\lambda(l). \qquad (\beta')$$

La *colambda* de un arco se designa también con el nombre de *correspondiente* de la *lambda*, e inversamente.

13. Nosotros, en la confección de nuestras primeras tablas, hemos seguido en parte a Barreda, pero aumentando la exactitud de ellas por haber reducido el intervalo a veinte segundos de arco y acrecido la mantisa hasta la séptima decimal.

También hemos perfeccionado el instrumento de cálculo de Guyou, pues mientras éste se limitó a calcular sus tablas con la aproximación de la décima, nosotros la hemos llevado a la centésima; y por otra parte el período de la variación del arco, que para Guyou era de un minuto, lo hemos reducido a quince segundos. A más, la mayor parte de los números han sido calculados directamente, dejando solo intervenir la interpolación para intervalos de arco, en que no pudiera introducir errores sensibles. Ha sido un trabajo de benedictino, para cuya comprobación nos han servido de mucho las modernas tablas náuticas de nuestra marina de guerra, que tuvo la atención de enviarnos el distinguido director de la Escuela Naval, capitán de navío, señor Storni, enterado del trabajo en que estaba ocupado. Consignemos aquí nnestro agradecimiento a ese ilustre marino.

III

Proposiciones fundamentales acerca de los mercatoriales [1]

14. 1ª *La lambda de un arco negativo es igual a la del mismo arco positivo, afectada del signo menos.*

En efecto, la lambda de $-l$ es por definición:

$$\lambda(-l) = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ - \frac{l}{2}\right] = \log \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = \log \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]}$$

$$= -\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = -\lambda(l) \qquad \therefore \qquad \lambda(-l) = -\lambda(l).$$

[1] Como hace falta un nombre genérico para denominar estos nuevos logaritmos *(lambdas* y *colambdas)*, proponemos que se les llame *mercatoriales*, en honor de Kauffmann (Mercator) por haber éste vulgarizado la teoría de la carta marina.

Estos teoremas son debidos a Barreda; pero nosotros hemos dado mayor rigor a las demostraciones del segundo y cuarto y corregido algunos corolarios. *(Notas del autor.)*

Luego, cuando en el transcurso de un cálculo encontremos una lambda negativa, es señal de que el arco correspondiente es negativo.

2ª *La lambda de un arco es igual a la del suplemento en valor numérico, pero de signo contrario.*

Daremos de este teorema tres demostraciones :

a) $\lambda\,(180^\circ - l)$ es por definición :

$$\lambda\,(180^\circ - l) = \log \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{180^\circ - l}{2}\right],$$

y de ella, deducimos que

$$\log \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{180^\circ - l}{2}\right] = \log \operatorname{tg} \left[45^\circ + 90^\circ - \frac{l}{2}\right] =$$
$$= \log \operatorname{cotg} \left[-45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

porque los arcos

$$\left[45^\circ + 90^\circ - \frac{l}{2}\right] \quad \text{y} \quad \left[-45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

son complementarios.

Pero tenemos :

$$\log \operatorname{cotg} \left[-45^\circ + \frac{l}{2}\right] = \log\,(-) \operatorname{cotg} \left[45^\circ - \frac{l}{2}\right] =$$
$$= \log\,(-) \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = -\log \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = -\lambda\,(l).$$

Luego, si este razonamiento no es vicioso, debe ser :

$$\lambda\,(180^\circ - l) = -\lambda\,(l).$$

b) Consideremos ahora

$$\lambda\,(180^\circ - l) = -\lambda\,(l - 180^\circ);$$

igualdad legítima según la primera proposición, y partamos de ella :

$$\lambda\,(180^\circ - l) = -\lambda\,(l - 180^\circ) = -\log \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{l - 180^\circ}{2}\right]$$

por definición. Tenemos :

$$\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l - 180^\circ}{2}\right] = \operatorname{tg}\left[45^\circ - 90^\circ + \frac{l}{2}\right] = \operatorname{tg}\left[-45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

$$= -\operatorname{tg}\left[45^\circ - \frac{l}{2}\right] = -\operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right].$$

Multipliquemos por (-1) :

$$-\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l - 180^\circ}{2}\right] = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]},$$

y tomando logaritmos será :

$$-\log\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l - 180^\circ}{2}\right] = -\log\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right],$$

o bien :

$$\log\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l - 180^\circ}{2}\right] = \log\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right],$$

o sea :

$$\lambda(l - 180^\circ) = \lambda(l),$$

o en fin :

$$-\lambda(l - 180^\circ) = \lambda(180^\circ - l) = -\lambda(l).$$

c) Partamos ahora de $\lambda(l)$ y deduzcamos $\lambda(180^\circ - l)$. Se tiene, por definición :

$$\lambda(l) = \log\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right].$$

Pasando a los números podemos escribir :

$$\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = \operatorname{cotg}\left[45^\circ - \frac{l}{2}\right] = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + 180^\circ - \frac{l}{2}\right],$$

porque la tangente o la cotangente de un arco no cambia de valor ni signo, aumentando o disminuyendo al arco, 180°

$$\operatorname{cotg}\left[45^\circ + 180^\circ - \frac{l}{2}\right] = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + 90^\circ + \frac{180^\circ - l}{2}\right]$$

$$= \operatorname{tg}\left[-45^\circ - \frac{180^\circ - l}{2}\right] = -\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{180^\circ - l}{2}\right];$$

y tomando logaritmos :

$$\lambda(l) = -\lambda(180° - l) \qquad \text{o} \qquad \lambda(180° - l) = -\lambda(l).$$

3ª *La colambda de un arco negativo es igual a la del mismo arco tomado como positivo, pero precedida del signo menos.*

Por definición se tiene :

$$\text{co}\lambda(-l) = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° - (-l)}{2}\right] = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° + l}{2}\right].$$

Inferimos de :

$$\text{co}\lambda(-l) = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° + l}{2}\right] =$$

$$= \log \text{tg}\left[90° + \frac{l}{2}\right] = \log \text{cotg}\left[-\frac{l}{2}\right] \qquad (1)$$

$$\text{co}\lambda(l) = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° - l}{2}\right] = \log \text{tg}\left[90° - \frac{l}{2}\right] = \log \text{cotg}\frac{l}{2}. \qquad (2)$$

Comparando las igualdades (1) y (2), resulta :

$$\text{co}\lambda(-l) = -\text{co}\lambda(l).$$

4ª *La colambda de un arco es igual a la del suplemento precedida del signo negativo.*

Daremos dos demostraciones de este teorema :

a) Deduzcamos de $\text{co}\lambda(l)$, $\text{co}\lambda(180° - l)$. Pondremos :

$$\text{co}\lambda(l) = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° - l}{2}\right]$$

$$\text{co}\lambda(180° - l) = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° - (180° - l)}{2}\right] \qquad (1)$$

$$\text{co}\lambda(l) = \log \text{tg}\left[90° - \frac{l}{2}\right] = \log \text{cotg}\frac{l}{2}\Big]$$

$$\text{co}\lambda(180° - l) = \log \text{tg}\left[45° + \frac{90° - 180° + l}{2}\right] =$$

$$= \log \text{tg}\left[90° - 90° + \frac{l}{2}\right] \qquad (2)$$

$$= \log \text{tg}\frac{l}{2} = \log \frac{1}{\text{cotg}\frac{l}{2}} = -\log \text{cotg}\frac{l}{2}.$$

Multiplicando la (2) por (— 1) viene :

$$-\operatorname{co\lambda}(180^\circ - l) = \log \operatorname{cotg} \frac{l}{2}. \qquad (2')$$

Comparando las igualdades (1) y (2′), sale :

$$\operatorname{co\lambda}(l) = -\operatorname{co\lambda}(180^\circ - l);$$

b) Partamos de $\operatorname{co\lambda}(180^\circ - l)$ y deduzcamos $\operatorname{co\lambda}(l)$

$$\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{90^\circ - (180^\circ - l)}{2}\right] = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l - 90^\circ}{2}\right]$$

$$= \log \operatorname{cotg}\left[45^\circ - \frac{l - 90^\circ}{2}\right] = \log \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45^\circ + \dfrac{90^\circ - l}{2}\right]}$$

$$= -\log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{90^\circ - l}{2}\right] = -\operatorname{co\lambda}(l);$$

luego :

$$\operatorname{co\lambda}(180^\circ - l) = -\operatorname{co\lambda}(l) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{co\lambda}(l) = -\operatorname{co\lambda}(180^\circ - l).$$

15. De estos teoremas se deducen varios corolarios :

1° $$\operatorname{co\lambda}(90^\circ + a) = -\lambda(a);$$

2° $$\lambda(180^\circ + a) = \lambda(a);$$

3° $$\lambda(360^\circ + a) = \lambda(a);$$

4° $$\lambda(90^\circ + a) = \operatorname{co\lambda}(-a);$$

5° $$\operatorname{co\lambda}(180^\circ + a) = -\operatorname{co\lambda}(-a) = \operatorname{co\lambda}(a);$$

6° $$\operatorname{co\lambda}(360^\circ + a) = -\operatorname{co\lambda}(-a) = \operatorname{co\lambda}(a).$$

Las demostraciones de estos corolarios se fundan en una o más de las proposiciones precedentes y las omitimos por no ofrecer dificultad la mayor parte.

16. Para completar la teoría, investigaremos las lambdas y colambdas de algunos valores particulares.

Para $a = 0$:

$$\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{a}{2}\right] \quad \text{se convierte en } \log \operatorname{tg} 45^\circ = 0,$$

$$\text{co}\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90° - a}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 90° = \infty.$$

Para $a = 90° = \frac{\pi}{2}$:

$$\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 90° = \infty,$$

$$\text{co}\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90° - 90°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 45° = 0.$$

Para el arco $a = 180° = \pi$:

$$\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{180°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 135° = 0,$$

$$\text{co}\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90° - 180°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 0° = -\infty.$$

Para $a = 270° = \frac{3}{2}\pi$:

$$\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{270°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 180° = -\infty,$$

$$\text{co}\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90° - 270°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}(-45°) = 0.$$

Para $a = 360° = 2\pi$:

$$\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{360°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 225° = 0,$$

$$\text{co}\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90° - 360°}{2}\right]$$

$$\text{se convierte en } \log \text{tg}\,(-90°) = -\infty.$$

Para $a = 45° = \frac{\pi}{4}$:

$$\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{45°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 67°30',$$

$$\text{co}\lambda\,(a) = \log \text{tg} \left[45° + \frac{90° - 45°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \text{tg}\, 67°30'.$$

Para $a = 135° = 3\frac{\pi}{4}$:

$$\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{135°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \operatorname{tg} 112°30',$$

$$\operatorname{co}\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - 135°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \operatorname{tg} 22°30'.$$

Para $a = 225° = 5\frac{\pi}{4}$:

$$\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{225°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \operatorname{tg} 157°30',$$

$$\operatorname{co}\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - 225°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \operatorname{tg} (= 22°30').$$

Para $a = 315° = 7\frac{\pi}{4}$:

$$\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{315°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \operatorname{tg} 202°30',$$

$$\operatorname{co}\lambda(a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - 315°}{2}\right] \text{ se convierte en } \log \operatorname{tg} [- 67°30'].$$

$$\lambda(270° + a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{270° + a}{2}\right] = \log \operatorname{tg}\left[180° + \frac{a}{2}\right] = \log \operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

$$= \log \operatorname{cotg}\left[90° - \frac{a}{2}\right] = \log \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{90° - a}{2}\right] = - \operatorname{co}\lambda(a),$$

$$\operatorname{co}\lambda(270° + a) = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - (270° + a)}{2}\right] = \log \operatorname{tg}\left[- 45° - \frac{a}{2}\right]$$

$$= - \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{a}{2}\right] = - \lambda(a).$$

17. Por último, podrían buscarse los arcos que corresponden a una *lambda* o *colambda* dada :

a) Sea, por ejemplo :

$$\lambda(a + x) = \lambda(a),$$

es decir,

$$\log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{a + x}{2}\right] = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{a}{2}\right].$$

Debemos poner :

$$\operatorname{tg}\left[45° + \frac{a+x}{2}\right] = \operatorname{tg}\left[45° + \frac{a}{2}\right],$$

que según la goniometría, da :

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{a+x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a+x}{2}} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}.$$

Basta para que esta igualdad se verifique que :

$$\operatorname{tg}\frac{a+x}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

Un modo de satisfacer esta ecuación consiste en que x sea igual a $2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

b) Sea $90° - a$ el menor arco positivo correspondiente a un colambda dada, y $90° - x$ la expresión de los arcos que originan colambdas iguales a $\operatorname{co}\lambda(a)$. Se tiene :

$$\log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - a}{2}\right] = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - x}{2}\right],$$

o pasando a los números

$$\operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - a}{2}\right] = \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - x}{2}\right].$$

igualdad que se reduce a

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}.$$

El problema se convierte así en la determinación de los arcos que tienen la misma cotangente. Se sabe que ellos implican la condición

$$\frac{x}{2} = \frac{a}{2} + k\pi = \frac{a + 2k\pi}{2} \qquad \text{en que} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Pero sabemos que $\lambda(180° + a) = \lambda(a)$ y $\operatorname{co}\lambda(180° + a) = \operatorname{co}\lambda(a)$ lo que prueba que basta aumentar el arco $\frac{a}{2}$ en ambos casos en $\frac{1}{2}k\pi$ o el arco a en $k\pi$.

18. He aquí ahora una muestra de las tablas de Guyou, de las de Barreda, y de las dos especies de tablas construídas por el autor de esta disquisición.

TABLAS DE GUYOU

(De la colección de don Luis Pastor, tomo III, *Astronomía náutica y navegación*)

Partes meridionales

	37°			coλ	38°				
	λ	P	p		λ	P	p	coλ	
0′	2392.6	...	...	3763.8	2468.3	...	...	3665.2	60′
1	3.9	0.1	0.2	62.1	9.5	0.1	0.2	63.6	59
2	5.1	.3	0.3	60.4	2470.8	.3	0.3	62.0	58
3	6.4	.4	0.5	58.8	2.1	.4	0.5	60.3	57
4	7.6	.5	0.7	57.1	3.3	.5	0.6	58.7	56
5	8.9	.6	0.8	55.5	4.6	.6	0.8	57.1	55
6	2400.2	.8	1.0	53.8	5.9	.8	1.0	55.5	54
7	1.4	.9	1.2	52.2	7.2	.9	1.1	53.8	53
8	2.7	1.0	1.3	50.5	8.4	1.0	1.3	52.2	52
9	3.9	1.1	1.5	48.8	9.7	1.1	1.4	50.6	51
10	2405.2	...	...	3747.2	2481.0	...	...	3649.0	50
11	6.4	0.1	0.2	45.5	2.2	0.1	0.2	47.4	49
12	7.7	.3	0.3	43.9	3.5	.3	0.3	45.8	48
13	8.9	.4	0.5	42.2	4.8	.4	0.5	44.1	47
14	2410.2	.5	0.7	40.6	6.1	.5	0.6	42.5	46
15	1.4	.6	0.8	38.9	7.3	.6	0.8	40.9	45
16	2.7	.8	1.0	37.3	8.6	.8	1.0	39.3	44
17	4.0	.9	1.2	35.6	9.9	.9	1.1	37.7	43
18	5.2	1.0	1.3	34.0	2491.2	1.0	1.3	36.1	42
19	6.5	1.1	1.5	32.3	2.4	1.1	1.4	34.4	41
20	2417.7	...	...	3730.7	3	...	...	...	40
..	...	...	...	29.0	...	...	...	...	..
..	...	...	...	27.4	...	...	...	...	..
..	...	...	...	...	...	...	...	...	..
..	...	...	...	...	...	...	...	...	..
..	...	...	...	...	...	...	...	...	..
50	2455.6	...	...	3681.5	2532.1	...	...	3584.7	10
51	6.9	0.1	0.2	79.8	3.4	0.1	0.2	83.1	9
52	8.1	.3	0.3	78.2	4.7	.3	0.3	81.5	8
53	9.4	.4	0.5	76.6	5.9	.4	0.5	80.0	7
54	2460.7	.5	0.6	75.0	7.2	.5	0.6	78.4	6
55	1.9	.6	0.8	73.3	8.5	.6	0.8	76.8	5
56	3.2	.8	1.0	71.7	9.8	.8	1.0	75.2	4
57	4.5	.9	1.1	70.1	2541.1	.9	1.1	73.6	3
58	5.7	1.0	1.3	68.4	2.4	1.0	1.3	72.0	2
59	7.0	1.1	1.5	66.8	3.6	1.2	1.4	70.4	1
60′	2468.3	...	...	3665.2	2544.9	...	...	3668.8	0′
	coλ	P	p	λ	coλ	P	p	λ	
	52°				51°				

TABLAS DE J. A. BARREDA

m	s	′	$1^h 20^m$ 20° λ	coλ	$1^h 22^m$ 20°30′ λ	coλ	′	s	m
0	0	0	0.15477	0.75368	0.15881	0.74273	30	0	2
	4	1	91	331	95	237	29	56	
	8	2	0.15504	294	0.15908	201	28	52	
	12	3	18	257	22	165	27	48	
	16	4	31	221	35	129	26	44	
	20	5	45	184	49	093	25	40	
	24	6	58	147	62	057	24	36	
	28	7	72	110	76	021	23	32	
	32	8	85	074	89	0.73985	22	28	
	36	9	98	037	0.16003	950	21	24	
	40	10	0.15612	000	16	914	20	20	
	44	11	25	0.74964	30	878	19	16	
	48	12	39	927	43	842	18	12	
	52	13	52	890	57	806	17	8	
	56	14	66	854	70	771	16	4	
1	0	15	79	817	84	735	15	0	1
	4	16	93	781	97	699	14	56	
	8	17	0.15706	744	0.16111	664	13	52	
	12	18	20	708	24	628	12	48	
	16	19	33	672	38	593	11	44	
	20	20	47	635	51	557	10	40	
	24	21	60	599	65	522	9	36	
	28	22	73	563	78	486	8	32	
	32	23	87	526	92	451	7	28	
	36	24	0.15800	490	0.16205	415	6	24	
	40	25	14	454	19	380	5	20	
	44	26	27	418	33	341	4	16	
	48	27	41	381	46	309	3	12	
	52	28	54	345	60	274	2	8	
	56	29	68	309	73	239	1	4	
2	0	30	81	273	87	203	0	0	0
			coλ	λ	coλ	λ			
			69°30′ $4^h 38^m$		69° $4^h 36^m$				

PRIMERAS TABLAS DE A. PÉREZ

(inéditas)

				8°30′ a 8°′45′ $0^{h}34^{m}$ a $0^{h}35^{m}$						8°45′ a 9°00′ $0^{h}35^{m}$ a $0^{h}36^{m}$					
				Lambdas λ	Colambdas coθ					Lambdas λ	Colambdas coλ				
34^{m}		30′				35^{m}		45′	45″	0.06658.32	1.11621.94		15′		1^{m}
		30		0.06466.65	1.12893.62				20	62.58	602.26	40″			
			20″	70.91	865.14				40	66.84	574.61	20	14		
			40	75.17	836.67		4^{m}	46		71.10	546.97	40	14		
	4^{s}	31		79.43	808.23				20	75.36	519.35	20			
			20	83.68	779.81				40	79.62	491.75	20	13	52^{s}	
			40	87.94	751.40		8	47		83.88	464.16		13		
	8	32		92.20	723.01				20	88.14	436.59	40			
			20	96.46	694.64				40	92.40	409.04	20			
			40	0.06500.72	666.29		12	48		96.66	381.50		12		
	12	33		04.98	637.95				20	0.06700.93	353.99	40			
			20	09.23	609.64				40	05.19	326.49	20			
			40	13.49	581.34		16	49		09.45	299.10	·	11		
	16	34		17.75	553.06				20	13.71	271.54	40			
			20	22.01	524.80				40	17.97	244.09	20			
			40	26.27	496.56		20	50		22.23	216.66		10		
	20	35		30.53	468.34				20	26.49	189.25	40			
			20	34.79	440.13				40	30.76	161.85	20			
			40	39.04	411.94		24	51		35.02	134.47				
	24	36		43.30	383.77				20	39.28	107.11		9		
				...	...					...	...				
				...	...					...	...				
				...	...					...	...				
			40	0.06602.93	1.11991.28					0.06794.69	1.10752.93				
	44	41		07.19	963.38					98.95	725.80		4	16	
			20	11.45	935.50					0.06803.22	698.69	40			
			40	15.71	907.63					07.48	671.60	20			
	48	42		19.97	879.78					11.74	644.52		3	12	
			20	24.23	857.95					16.00	617.46	40			
			40	28.49	824.14					20.27	590.42	20			
	52	43		32.75	706.34					24.53	563.40		2	8	
			20	37.01	768.56					28.79	536.39	40			
			40	41.27	740.80					33.06	509.39	20			
	56	44		45.54	713.06					37.32	482.42		1	4	
			20	49.80	685.33					41.58	455.46	40			
			40	54.06	657.63					45.85	428.51	20			
35^{m}		45		0.06658.32	1.11629.90	36^{m}				0.06850.11	1.10401.58		0		0^{m}
				coλ	λ					coλ	λ				
				81°15′ a 81°30′ $5^{m}25^{m}$ a $5^{h}26^{m}$						81°00′ a 81°15′ $5^{h}24^{m}$ a $5^{h}25^{m}$					

MUESTRA DE LAS TABLAS DE MERCATORIALES DE A. PÉREZ

1 hora		22°		Lambdas λ	Partes proporcionales	Colambdas coλ	68°			
28^m	0^s	0′	0″	1353.69	$\Delta\lambda 1'' = 1.7966$	5630.82		68°		32^m
	1		15	3.96	$\Delta C\lambda 1'' = 4.44$	30.25	45″			
	2		30	4.22	$\Delta\lambda$ *Pp* $\Delta C\lambda$	29.48	30		58^s	
	3		45	4.49	1.80 1 4.44	8.82	15			
	4	1		1354.76	3.59 2 8.88	5628.15		59′		
	5		15	5.03	5.39 3 13.32	7.48	45			
	6		30	5.30	7.19 4 17.76	6.81	30		54	
	7		45	5.57	8.98 5 22.20	6.15	15			
	8	2		1355.84	17.97 10 44.40	5625.48		58		
	9		15	6.11	25.95 15 86.60	4.81	45			
	10		30	6.38		4.15	30		50	
	11		45	6.65		3.48	15			
	12	3		1356.92		5622.82		57		
			15	7.19		2.15	45			
	14		30	7.46		1.49	30		46	
			45	7.73		20.82	15			
		4		1358.00		5620.16		56		
			15	8.27		9.50	45			
	18		30	8.54		8.83	30		42	
			45	8.81		8.16	15			
		5		1359.08		5617.50		55		
			15	9.35		6.83	45			
	22		30	9.62	$\Delta\lambda 1'' = 1.8$	6.17	30		38	
			45	9.89	$\Delta C\lambda 1'' = 4.426$	5.50	15			
		6		1360.16	$\Delta\lambda$ *Pp* $\Delta C\lambda$	5614.84		54		
			15	0.43	1.8 1 4.43	4.17	45			
	26		30	0.70	3.6 2 8.85	3.51	30		34	
			45	0.97	5.4 3 13.28	2.84	15			
		7		1361.24	7.2 4 17.71	5612.18		53		
			15	1.51	9.0 5 22.13	11.52	45			
	30		30	1.78	18.0 10 44.27	10.85	30		30	
			45	2.05	27.0 15 66.40	10.19	15			
		8		1362.32		5609.53		52		
			15	2.59		8.86	45			
	34		30	2.86		8.20	30		26	
			45	3.13		7.53	15			
		9		1363.40		5506.87		51		
			15	3.67		6.20	45			
	38		30	3.94		5.34	30		22	
			45	4.21		4.88	15			
28	40	10		1364.48		5604.22		50	20	31
				coλ Colambdas		λ Lambdas	67° — 4 horas			

IV

Aplicaciones curiosas de la teoría de los mercatoriales

A. — AL CÁLCULO DE LOS LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

19. Tanto las tablas de Guyou como las de Barreda o las primeras y segundas del autor, permiten calcular los logaritmos de las referidas funciones.

Indicaremos, someramente, la marcha a seguir usando de las tablas de Guyou o de las *segundas* del autor de este trabajo y con más detalles, tratándose de las tablas de logaritmos tangentes de Barreda o de las nuestras.

En el sistema de logaritmos adoptados por Guyou $\left[\text{base} = e^{\frac{\ }{10800}}\right]$ es fácil ver que :

$$\log \operatorname{tg} x = -\operatorname{co}\lambda\,(2x) \qquad \text{y} \qquad \log \operatorname{cotg} x = \operatorname{co}\lambda\,(2x)$$

puesto que :

$$\log \operatorname{tg} x = \log \operatorname{cotg}\,[90° - x] = \log \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{90° - 2x}{2}\right] = -\operatorname{co}\lambda\,(2x)$$

y

$$\log \operatorname{cotg} x = \log \operatorname{tg}\,[90° - x] = \log \operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - 2x}{2}\right] = \operatorname{co}\lambda\,(2x).$$

Veamos el medio de formar los logaritmos senos y cosenos. Hagamos :

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} y \tag{1}$$

con lo cual

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y}. \tag{2}$$

El primer miembro equivale a :

$$\frac{1 + \cos\,(90° - x)}{1 - \cos\,(90° - x)} = \frac{2\cos^2\left[45° - \frac{x}{2}\right]}{2\cos^2\left[45° - \frac{x}{2}\right]} = \tag{3}$$

$$= \operatorname{cotg}^2\left[45° - \frac{x}{2}\right] = \operatorname{tg}^2\left[45° + \frac{x}{2}\right].$$

El segundo miembro de la (2) equivale a :

$$\frac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}=\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{2y}{2}\right], \tag{4}$$

y por tanto de (3) y (4)

$$2\lambda(x)=\lambda(2y). \tag{a}$$

Ahora, por la (1), llevando en cuenta la anterior

$$\log \operatorname{sen} x=\log \operatorname{tg} y=-\operatorname{co}\lambda(2y).$$

Mediante las ecuaciones (*a*) y (*b*) podríamos determinar log sen x, e inversamente, hallar el arco x.

Los logaritmos cosecantes y secantes tienen expresiones idénticas, pero de signo contrario respectivamente.

(Continuará.)

VOLÚMENES Y FOLLETOS

EN EL TRIMESTRE ABRIL, MAYO Y JUNIO DE 1926

Diccionario bibliográfico de peruanos contemporáneos, publicado bajo la dirección de Juan Pedro Paz-Soldán, 439 páginas, Librería e imprenta Gil, año 1917, Lima, Perú.

Carnegie endowment for international peace. Founded December 14, 1910; Year Book, 1925, número 14, 241 páginas, published by the Endowment, año 1825, Wáshington.

Academia das Sciencias de Lisboa, *O clima de Portugal Continental,* pelo general Joao Maria de Almeida Lima, 81, Imprenta Nacional, años 1922, Lisboa.

Contributi Scientifici delle missioni Salesiane del venerabile Don Bosco: La Lingua dei Bororos. Orarimugudoge. Secondo i materiali publicati dalle missioni Salesiane. Studio comparativo del Prof. Alfredo Trombetti. *La struttura grammaticale. I vocaboli. Conclusioni,* 60 páginas. Società editrici internazionale, año... ? Torino.

Contributi Scientifici delle missioni Salesiane del venerabile Don Bosco: D. Antonio Colbacchini, *I Bororos Orientali « Orarimugudoge » del Matto Grosso (Brasile). Notizie Etnografiche. Miti degli Orarimugudoge. Grammatica. Testi. Canti Religiosi,* 210 páginas, Società editrici internazionale, Torino.

Roberto Levillier, *El descubrimiento del norte argentino. La expedición de Diego de Rojas del Cuzco al Tucumán y al Río de la Plata, 1543-1546,* 69 páginas, Librería Francesa Rosay, año 1925, Lima, Perú.

Publicaciones de la Secretaría de Educación Pública, México, D. F. *Universidad Nacional de México. Curso de fisiología,* sustentado por el profesor Eugenio Gley, en la Facultad de Medicina. I, *Lecciones;* II, *Conferencias;*

III, *Experiencias de laboratorio,* 116 páginas, Secretaría de Educación Pública, Dirección editorial, 1925, México.

Samuel Klingenstiernas, *Levnad och verk. Biografish skildring utgiven av K. Svenska Vetenskapsakademien. II Vetenskapliga arbeten.* 1 av C.W. Oseen. Med 26 textfigurer, 69 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryckeri, A. B., 1925, Stockholm.

La provincia de Buenos Aires. Su estado social y económico presente y perspectivas para su futuro, compilado por don Jorge Selva : I, *El territorio de la provincia ;* II, *El factor humano, la población ;* III, *Intensificación, la vida comunal, las ciudades ;* IV, *Comunicaciones y transportes ;* V, *Las riquezas agropecuarias ;* VI, *La agricultura ;* VII, *Los productos minerales ;* VIII, *Industrias manufactureras y mecánicas ;* IX, *Las instituciones bancarias ;* X, *Condiciones de trabajo ;* XI, *Gobierno y administración de la provincia ;* XII, *Cuadro sintético del estado actual de la provincia de Buenos Aires ;* XIII, *Lo que debe saber todo inmigrante que se dirija a la República Argentina,* 90 páginas, Talleres de impresiones oficiales, 1926, La Plata.

Notas de arqueología prehistórica galaica. Los dólmenes de Dombate y de la Gándara (Coruña), por el doctor C. Pérez Bustamante, con la coloboración de S. Parga Pondal, *Boletín de la Biblioteca Menéndez y Pelayo,* 49 páginas, Talleres tipográficos J. Martínez, 1924, Santander.

Sobre la enseñanza de la Matemática para los químicos, por el ingeniero José Babini. Trabajo presentado al Segundo Congreso de Química (1º Sudamericano), 19 páginas, Establecimiento gráfico de T. Palumbo, 1926, Buenos Aires.

The Spanish Heritage in America, by William S. Shepherd. Reprinted from The Modern Language Journal, 1925, Columbia (N. A.).

Ministerio de Agricultura, República Argentina. Sección propaganda e informes. Laboratorio de botánica. *Leguminosas forrajeras de la flora argentina. Medicago L. (Alfalfa, lupulina, tréboles de carretilla),* por Enrique C. Clos, ingeniero agrónomo, 20 páginas, Talleres gráficos del Ministerio de Agricultura de la Nación, 1926, Buenos Aires.

Período constitucional, 1923-1927. Mensaje dirigido a la Asamblea nacional de El Salvador por el señor presidente de la República, doctor don Alfonso Quiñones Molina, en la solemne apertura de las sesiones ordinarias de 1926, 33 páginas, Imprenta Nacional, 1926, Salvador.

Biblioteca obrera, fundada el 25 de septiembre de 1897. Subvencionada por el Superior Gobierno de la Nación. *Memoria del XXVIII ejercicio correspondiente al año 1925,* 22 páginas, Imprenta sindical de la Federación Gráfica, Buenos Aires.

Registro de la Escuela Naval Militar, 1920-1925, 88 páginas, Imprenta de la Escuela Naval Militar, 1926, Río Santiago (provincia de Buenos Aires).

Manuel Barros, *Ciperáceas argentinas ; clave para la determinación de los géneros,* 29 páginas, Imprenta de la Universidad, 1925, Buenos Aires.

Manuel Velasco de Pando, *Memoria sobre la elasticidad y resistencia de las piezas prismáticas, cuyo eje es una curva plana, cargadas normalmente a su plano.* 26 páginas. Imprenta Colonial (Estrada Hermanos), 1917, Sevilla (España).

Frank L. Soler, *Contribución al conocimiento de las funciones del bazo. Sissoresis esplénica,* 25 páginas, Imprenta Mercantil, 1926, Buenos Aires.

Alberto Schneidewind, *Estudio económico de los ferrocarriles argentinos desde el punto de vista del interés general.* Publicado en el *Boletín del Congreso Sudamericano de Ferrocarriles,* año X, primer semestre, número 19, 21 páginas, Talleres gráficos de la Compañía General de Fósforos, 1926, Buenos Aires.

Umberto Nobile, *Il volo transpolare.* Conferenza tenuta nell'Aula Magna della R. Università di Roma il 23 Novembre 1925, alla presenza di S. M. il Re, 27 páginas, 1925, Roma.

Ramón G. Loyarte, *La estructura del átomo. Estado actual de la cuestión,* 63 páginas, Tomás Palumbo, 1925, Buenos Aires.

S. Venturi, *Supercherías spegazzinianas o palos y más palos,* Imprenta Miguel Violetto, 1925, Tucumán.

Juan A. Briano, *Acceso de los ferrocarriles del Estado a la Capital federal. Características y ventajas principales de establecerlo por Entre Ríos. Principales objeciones formuladas a este proyecto,* 35 páginas, Escuela tipográfica del Colegio León XIII, 1923, Buenos Aires.

Juan A. Briano, *Proyecto de ubicación del mercado de ganado con acceso de las tres trochas de ferrocarriles. Vinculación de los ferrocarriles del sur de la República con los del norte,* 40 páginas, 1917, Buenos Aires.

Juan A. Briano, *Modificación de las líneas del Ferrocarril Central Argentino en la ciudad de Buenos Aires,* 27 páginas, 1915, Buenos Aires.

Juan A. Briano, *Ferrocarril Intercontinental Panamericano. Sus nuevas orientaciones. Ferrocarril Internacional Americano,* Talleres gráficos de la guía «Expreso», 1919, Buenos Aires.

Juan A. Briano, *Acceso de los ferrocarriles del Estado a la Capital federal. Red mesopotámica.* Conferencia pública dada en el local de la Biblioteca Popular del Paraná el 13 de noviembre de 1919, 31 páginas, Talleres «Jacobo Peuser», 1920, Buenos Aires.

Erik Asplund, *Floran inom Garphytte Nationalpark,* publicado por la K. Svenska Vetenskapsakademiens Skrifter I Naturskyddsä renden, 35 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryckori, A. B, 1925, Stockholm.

José Babini, *Sobre la interpretación lineal,* 10 páginas, 1926, Madrid.

A. A. Romero, *La explotación del petróleo en el Neuquén. Teorías equivocadas y estudios geológicos imaginarios practicados en la zona de explotación*, 16 páginas, 1926, Buenos Aires.

Guillermo Hoxmark, *La aviación y la meteorología* ; I, Presión atmosférica ; II, Temperatura atmosférica ; III, El tiempo y la visibilidad ; IV, Esdística y manuales ; V, La navegación aérea y la exploración científica de la atmósfera ; VI, Relaciones de los aviadores con los meteorólogos, 13 páginas, Talleres gráficos del Ministerio de Agricultura de la Nación, 1924, Buenos Aires.

BIBLIOGRAFÍA

Turbines Hidrauliques, por A. Rateau, miembro de la Academia de Ciencias, D. Eydoux, profesor de la Escuela nacional de puentes y calzadas, y M. Gariel, director general de las Usinas Neyret-Beylier y Piccard-Pictet. Un volumen en 8º, de 692 páginas. Editores: Librairie J. B. Baillière et Fils. París, 1926. Publicación de la *Encyclopéde de Mécanique Appliquée*. Director, M. L. Lecornu.

Si se considera la energía hidráulica disponible, que alcanza la enorme cifra de 662 millones de HP, en todo el mundo, según Mattern; la potencia total de las turbinas en funcionamiento, estimada en 25 millones de HP, y los extraordinarios progresos de la Electrotécnica, que permiten el fácil transporte de alta tensión, a grandes distancias y reducidas pérdidas, se echará de ver el gran desarrollo que debe adquirir la energía hidráulica en sus aplicaciones a las industrias humanas, desarrollo evidenciado de día en día con los nuevos y poderosos planteles hidroeléctricos que se instalan en diversas naciones. La energía hidráulica tiende en la actualidad, a substituir progresivamente a la energía del combustible que antes constituía el principal motor de la industria.

La construcción de poderosas turbinas, hasta de 50.000 HP, por unidad, y la instalación de grandes usinas, con alturas de caída muy variables y en diferentes condiciones de rendimiento y de trabajo, implica toda una serie de problemas prácticos, cuya solución en muchos casos debe optenerse por estudios, principalmente basados en la Hidrodinámica y en la Hidráulica, aparte la índole especial de los mismos.

El tratado arriba enunciado, primer volumen de una obra que comprenderá tres, se debe a los eminentes hidráulicos Rateau, Eydoux y Gariel, conocidos autores de la materia. La obra es, por su carácter, completamente didáctica y resumirá, según los autores, la Hidrodinámica y la Hidráulica en su aplicación posible al estudio y al cálculo completo de las turbinas y de sus órganos anexos, teniendo especialmente en los trabajos más recientes y las teorías moderaas.

El primer volumen, que es el publicado, trata de las nociones generales de Hidrodinámica y de las teorías aplicables a las turbomáquinas. El segundo tendrá particularmente en vista al estudio detallado, tanto teórico como práctico, de los dos grandes grupos de turbinas modernas, es decir, las de impulsión y las de reacción. El tercero, estudiará los problemas anexos y los accesorios de las turbinas: su regulación, los dispositivos protectores contra los golpes de ariete, etc., y ejemplo de las grandes instalaciones modernas.

El primer volumen comprende tres partes. La primera parte resume la Hidrodinámica en general : presiones y fuerzas exteriores, Estática, Cinemática y Dinámica de los flúidos ; teoría de los turbillones ; escurrimiento ; principio de las imágines de Lord Kelvin ; escurrimiento de líquidos viscosos ; líquidos naturales ; corrientes líquidas. Empuje ejercido por los flúidos en movimiento sobre obstáculos y caso recíproco ; presión de un chorro líquido sobre una superficie ; variaciones bruscas del escurrimiento ; orificios, salidas por compuertas y conductos. Homogeneidad y semejanza en Hidrodinámica.

La segunda parte estudia la Hidrodinámica aplicada a las máquinas hidráulicas rotativas o turbomáquinas hidráulicas, y comprende la fórmula fundamental, la semejanza de las turbomáquinas en general, los coeficientes característicos. Generalidades sobre máquinas receptoras o turbomáquinas. Estudio de las turbinas por consideraciones de semejanza, generatrices, bombas centrífugas.

La tercera parte trata de la Hidrodinámica especial de los conductos de alimentación de las turbinas, el regimen permanente, golpe de ariete de onda, oscilaciones en masa o golpe de resorte, las chimeneas de equilibrio, depósitos de aire.

No es posible en un simple artículo bibliográfico, considerar, ni someramente, las múltiples cuestiones que encierra este volumen, que debe señalarse como un tratado completo, en su forma y presentación y resume los principales estudios anteriormente efectuados, especialmente en lo que se refiere al golpe de ariete de onda, los rítmicos debidos al bombeo, por depósito de aire y las oscilaciones en masa o golpe de resorte ; todos ellos ampliamente tratados, según los estudios de Camichel, Foch, Joukowski, Allievi, de Sparre, etc., y de los mismos autores.

JUAN F. SHEAHAN.

Revista Chilena de Historia Natural, tomo XXX, dirigida por el doctor E. Porter.

Acabamos de recibir el tomo XXX de esta imprescindible Revista para nuestros países sudamericanos. Este número forma un volumen de 536 páginas, con 66 artículos originales, 30 láminas, 55 figuras intercaladas en el texto, datos sobre Museos y corporaciones científicas de Chile y una muy abundante bibliografía.

Como ya lo hemos hecho notar en otras oportunidades, el que una persona dé una vida treintenaria a una Revista científica, y solamente con sus medios propios atienda la impresión interrumpida de la Revista — los que están en esos trabajos saben lo que significa, — atienda sus cátedras, atienda la correspondencia con cientos de especialistas, etc., etc., representa una salud de hierro, una voluntad indómita, y una perseverancia heroica.

¿ Será de estrañar que el doctor Porter haya llamado la atención del mundo científico entero ? Bien merecido por consiguiente — además de los cientos de distinciones y reconocimientos que ya tiene en su haber que la *Société Zoologique de France* haya querido recompensar la obra de Porter con la medalla « Geoffrey Saint-Hilaire », tan pocas veces concedida que tiene el busto del gran naturalista francés : agregámosle nuestros sinceros plácemes.

Que Dios dé larga vida todavía a un *pioneer* de las Ciencias Naturales como lo es el doctor Carlos E. Porter.

VARIABILIDAD ESTELAR

Por C. D. PERRINE
Director del Observatorio astronómico nacional de Córdoba

Casi todos los esfuerzos de los observatorios estrictamente nacionales están forzosamente dedicados a grandes investigaciones, como las preparaciones de catálogos de las posiciones, magnitudes, etc., de las estrellas, los cuales son tan importantes en las investigaciones de la forma y estructura de nuestro Universo. Tales obras son demasiado costosas para las instituciones y observatorios particulares, hasta un grado en que solamente las naciones pueden sufragar los gastos.

Estas investigaciones requieren muchos años para su terminación y revelan pocos o ningún resultado de interés o novedad al público. Tales son las obras que ha ocupado al Observatorio Nacional Argentino en su existencia de más que medio siglo.

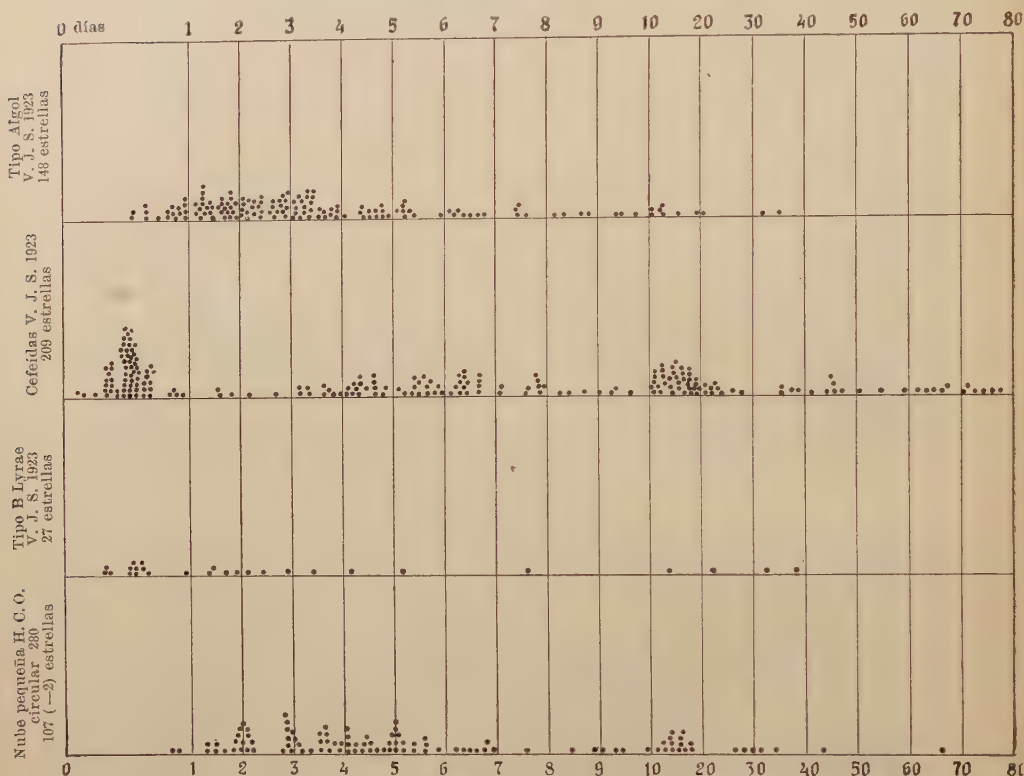
Pero la falta de observaciones físicas de las estrellas y nebulosas en el hemisferio sud ha sido tanta, y tan desequilibrados con los del hemisferio norte que hacen varios años fueron empezadas las observaciones e investigaciones de este género. Como requisito indispensable para obtener las observaciones espectroscópicas y fotográficas de las estrellas débiles y las nebulosas, fué empezada la construcción de un reflector grande, el cual fué interrumpido por la guerra y todavía no está terminado.

Tanto como era posible han sido proveídas tales observaciones, como podían ser conseguidos con los aparatos actuales, pocas sin embargo, hasta la fecha.

Unos pocos resultados de interés han salido de estas investigaciones, pero más para sus *indicaciones* y requiriendo observaciones con instrumentos poderosos para su debida confirmación y extensión. Este es especialmente el caso con varias relaciones entre los fenómenos de

las estrellas variables, que ha conducido a una teoría sobre el modo de las variaciones de luz, ahora bajo un prolijo estudio.

Varias relaciones entre los períodos, las brillanteces y las cantidades de variaciones de las estrellas variables han sido descubiertas e investigadas en los recientes años. Las más importantes son :



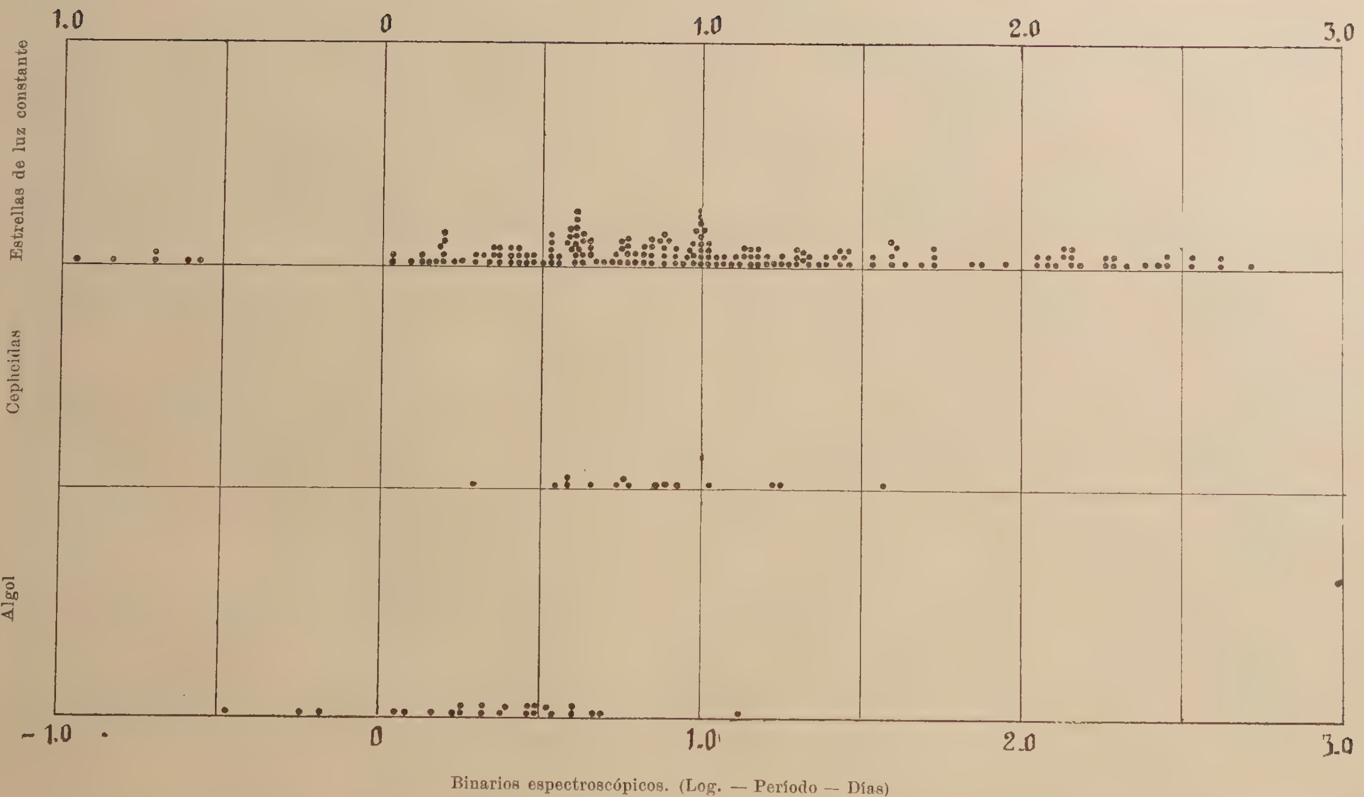
Relación entre variación y largo del período;
Preferencias de las variables para ciertos períodos;
Relación entre variación y máximo de luz.

RELACIÓN ENTRE VARIACIÓN Y LARGO DEL PERÍODO

Esta relación depende sobre el largo del período, lo más largo del período (hasta 500 días más o menos), la más larga variación. Sigue tabla I con los detalles de las varias clases. Los datos han sido extraídos del *Vierteljahrsschift der Astr. Ges.* para los años 1923 y 1925.

TABLA I

Clases y períodos	Promedio de períodos	Magnitud máxima	Amplitud	Número de estrellas
Tipo Algol :				
0d a 1d	0d78	9.63	0.95	14
1 a 2	1.56	9.12	1.19	32
2 a 3	2.50	8.64	1.62	28
3 a 4	3.43	9.27	1.80	24
4 a 5	4.56	9.00	1.68	13
5 a 6	5.29	9.25	1.59	18
6 a 7	6.39	9.41	1.54	7
7 a 9	7.98	10.6	1.28	8
9 a 13	10.85	9.21	1.75	8
15 a 21	18.53	8.17	1.00	3
31 a 35	33.11	10.4	1.75	2
Tipo β Lyrae :				
0d24 a 0d42	0d33	10.54	0.59	8
0.51 a 0.65	0.59	9.30	0.71	8
0.95	0.95	9.7	1.0	1
1.33 a 4.11	2.44	7.78	0.81	10
5.07 a 36.57	19.35	8.05	0.70	6
Cefeídas :				
0d13 a 0d23	0d18	11.50	0.70	3
0.31 a 0.45	0.39	10.63	1.03	19
0.46 a 0.55	0.50	10.45	1.27	23
0.56 a 0.63	0.58	10.19	1.00	12
0.65 a 0.94	0.73	10.16	0.90	11
1.53 a 2.14	1.80	7.65	0.80	4
2.57 a 3.97	3.39	7.81	0.90	9
4.0 a 4 98	4.43	8.71	0.96	15
5.0 a 6.99	5.95	8.18	0.95	28
7.0 a 9.99	8.18	6.68	0.84	16
10.0 a 14.99	12.36	8.68	1.04	16
15.0 a 27.33	18.98	8.66	1.36	27
34.8 a 46.13	40.85	7.38	1.19	10
50.0 a 77.00	66.5	8.51	1.17	14
Período largo :				
80d a 99d	89d	8.93	1.54	12
100 a 149	130	8.42	2.50	39
150 a 199	172	8.50	3.15	38
200 a 249	224	8.48	4.25	71
250 a 279	264	8.57	4.50	51
280 a 309	294	8.69	4.65	45
310 a 349	330	8.35	4.76	60
350 a 399	374	8.05	4.71	57
400 a 449	419	7.94	5.15	36
450 a 499	479	8.05	4.77	13
500 a 613	537	7.78	5.65	11
760 a 900	825	9.60	3.00	3


1.0
0
1.0
2.0
3.0
Estrellas de luz constante
Cepheidas
Algol
− 1.0
0
1.0
2.0
3.0
Binarios espectroscópicos. (Log. — Período — Días)

Estos resultados demuestran que además de la variación general hay preferencias para ciertos periodos diferentes, en diferentes clases. Estas preferencias sugieren pulsaciones u oscilaciones en una funda extensa de la estrella, como la causa de las variaciones de brillantez.

La relación entre período y luminosidad, descubierta por la señorita Leavitt del Harvard Observatory, en las estrellas de la Nube Chica de Magallanes, se encuentra en los datos de la tabla I, pero es afectada por las preferencias anotadas. La curva de Shapley (1) muestra algunas de las desviaciones, especialmente a dos y tres días.

RELACIÓN DE VARIACIÓN Y LUMINOSIDAD

La tabla II muestra los resultados de la dependencia de variación sobre la brillantez máxima para las varias clases.

TABLA II

Dependencia de brillantez

Clases y magnitudes	Promedio de magnitudes	Amplitud	Número de estrellas	Magnitud mínima
Variables de cortos períodos :				
> 4.0	3.45	0.73	6	
4.9 a 5.9	5.25	0.82	8	
6.0 a 7.9	7.03	0.94	47	
8.0 a 9.9	8.88	1.05	100	
10.0 a 11.9	10.59	1.10	45	
12.0 y más débiles ..	13.21	1.48	13	
Variables Algol :				
> 4.0	2.88	0.62	4	
4.0 a 5.9	5.33	0.63	3	
6.0 a 7.9	7.14	1.38	20	
8.0 a 8.9	8.53	1.68	25	
9.0 a 9.9	9.50	1.51	50	
10.0 a 11.9	10.52	1.49	41	
12.0 y más débiles ..	12.45	1.28	6	
Variables β Lyrae :				
> 5.9	4.13	0.60	3	
6.0 a 7.9	7.20	0.67	3	
8.0 a 8.9	8.44	0.79	10	
8.0 a 8.9	8.49	0.66	9	
9.0 a 14.7	10.27	0.70	18	

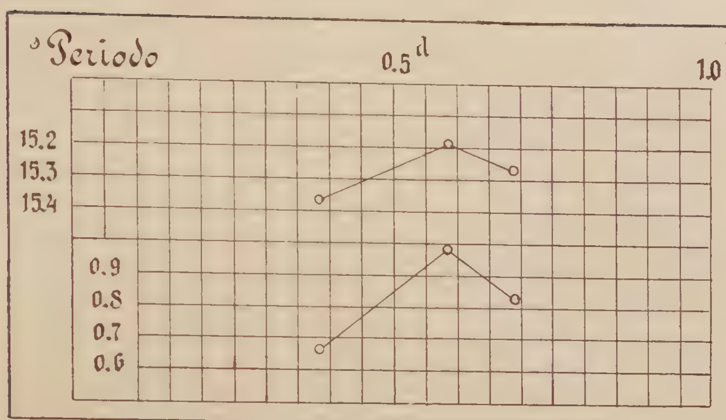
(1) Ver *Astrophysical Journal*, **48**, página 104, figura 1, 1918.

Clases y magnitudes	Promedio de magnitudes	Amplitud	Número de estrellas	Magnitud mínima
Largos períodos (más de 200 días) :				
> 4.0		(5.03)	(3)	
> 4.0	3.5	7.10	2	10.6
4.0 a 5.9	5.0	6.45	17	11.5
6.0 a 7.9	7.0	5.09	101	12.1
8.0 a 9.9	9.0	3.95	190	13.0
10.0 a 11.9	11.0	3.16	49	14.2
12.0 a 13.9	13.0	3.00	6	16.0
14.0 y más débiles ..	14.9	2.10	2	17.0
Espectro Md *solamente :*				
3.3 a 4.8	3.96	(6.64)	(5)	(10.6)
3.5 a 4.8	4.12	7.55	4	11.7
5.0 a 5.9	5.58	6.15	12	11.7
6.0 a 6.9	6.48	5.41	18	11.9
7.0 a 7.9	7.43	5.47	56	12.9
8.0 a 8.49	8.18	5.13	45	13.3
8.5 a 8.99	8.70	4.69	33	13.4
9.0 a 9.49	9.15	4.37	25	13.5
9.5 a 9.99	9.61	3.37	12	13.0
10.0 a 11.4	10.49	3.03	13	13.5
Espectro S *solamente :*				
5.6................	5.6	8.30	2	13.9
6.5 a 6.6	6.55	7.05	2	12.6
7.0 a 7.4	7.16	5.12	8	12.3
8.0 a 8.8	8.43	3.82	6	12.2
9.0 a 12.2	10.6	2.30	2	12.9

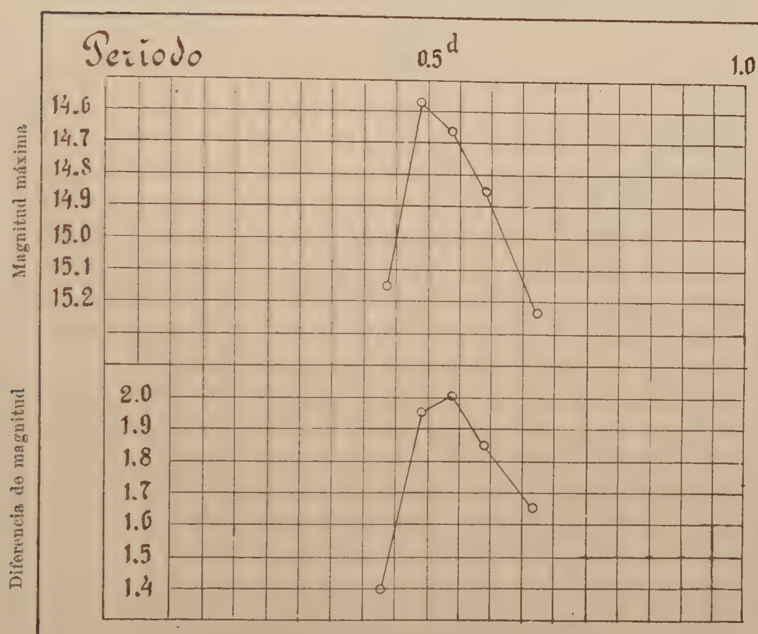
Según estos datos las Cefeídas y las Algols aumentan la variación con diminución de brillantez máxima. Al contrario de lo que ocurre en las variables de largos períodos, estas dependencias muestran también preferencias para ciertos períodos. Como se ve las estrellas de tipos espectrales M*d* y S son, en general, de la misma magnitud en sus mínimas. Se interpreta esto como una aumentación de luz de una condición normal indistinta o débil.

PREFERENCIA DE VARIABILIDAD, NÚMERO Y BRILLANTEZ PARA CIERTOS PERÍODOS

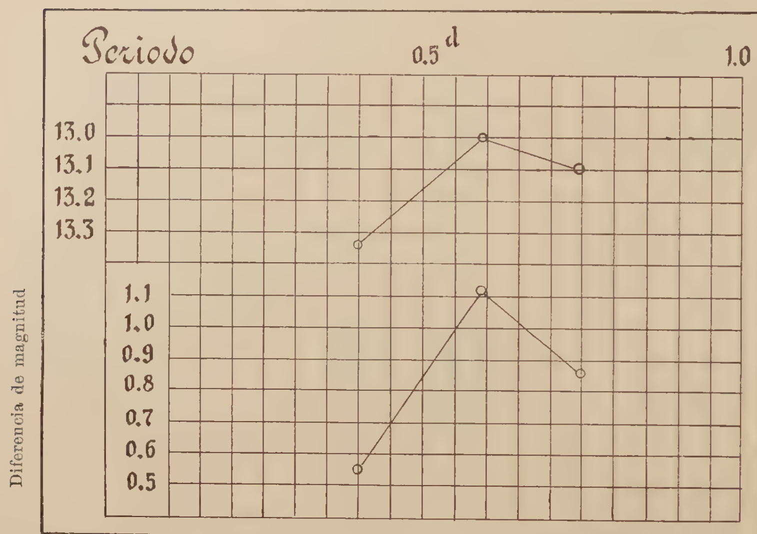
Estas relaciones están expuestas más claramente en las siguientes curvas :



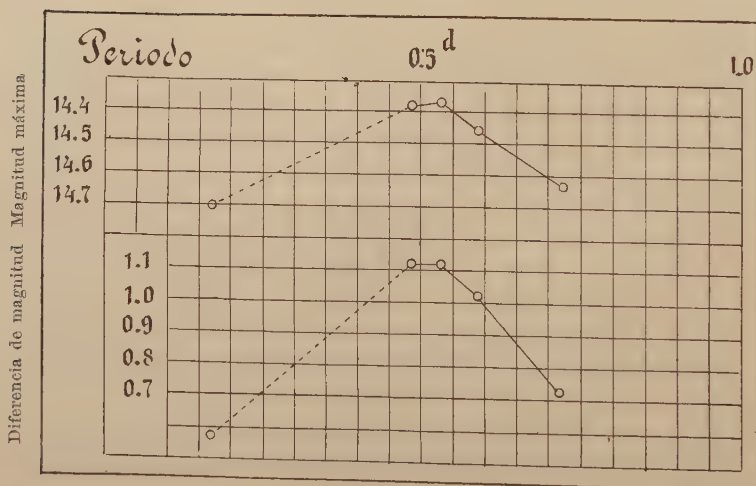
Messier 15



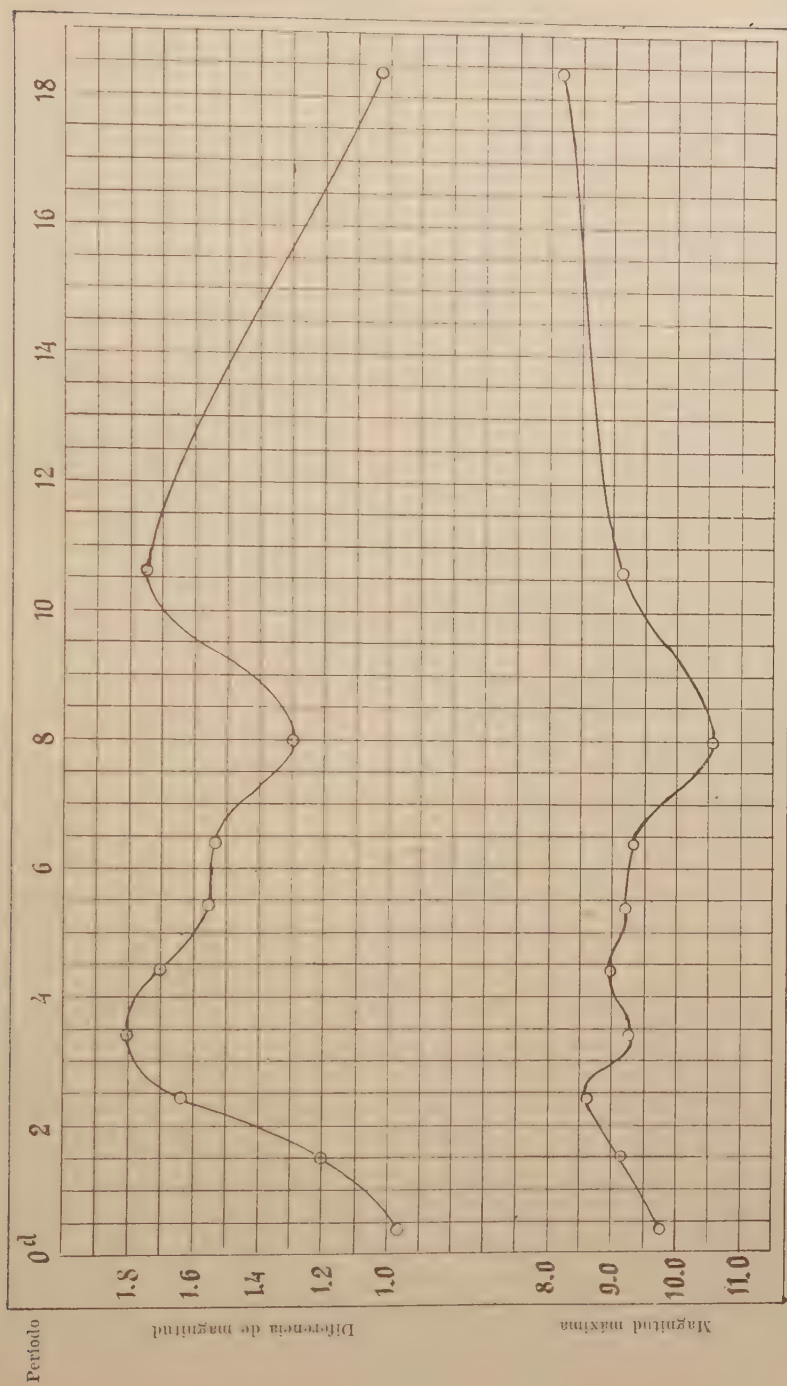
Messier 3

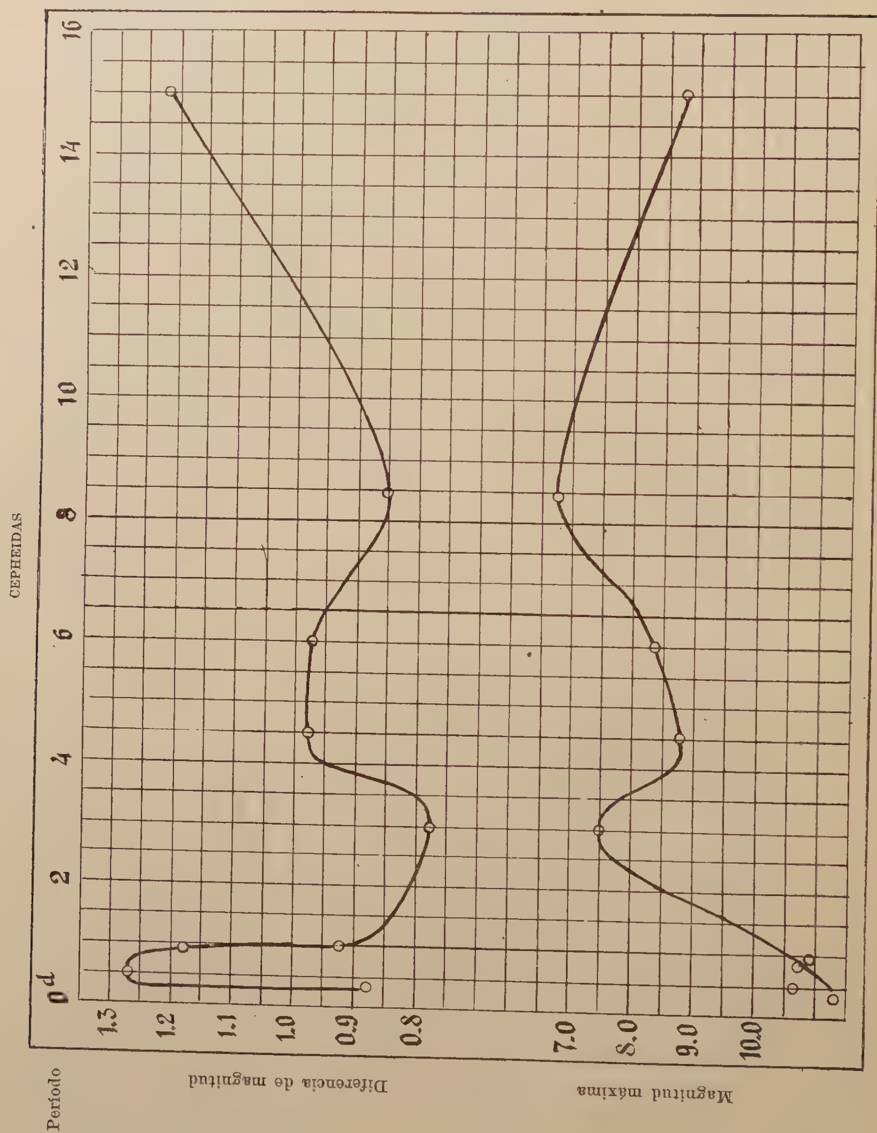


ω Centauri



Messier 5


Estrellas Algol
Período
0^d
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Diferencia de magnitud
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
Magnitud máxima
8.0
9.0
10.0
11.0


CEPHEIDAS
Período
0d
2
4
6
8
10
12
14
16
Diferencia de magnitud
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
Magnitud máxima
7.0
8.0
9.0
10.0

Las principales conclusiones, emergentes de estos datos son éstos:

a) La generalidad de estas relaciones conducen a la opinión de que todas las estrellas variables están unidas en una sola familia con una causa más o menos común.

b) Las Cefeídas y las Algols son casi completamente complementarias en sus preferencias para ciertos períodos.

c) En general las estrellas variables son más débiles que las de luz constante.

d) En las Cefeídas y Algols, las estrellas con períodos más corto que un día son mucho más débiles que los de períodos de 1 a 3 días.

e) En las Cefeídas hay casi una total falta de períodos de 0^d9 a 1^d5. Este «nodo» es todavía más notable en los cúmulos globulares de Messier 15 y ω de Centauro.

f) En los cuatro cúmulos ω de Centauro, Messier 3, 5 y 15, hay un fuerte máximo en el período cerca de 0^d5, de luz y preferencia también.

g) Los espectroscópicos binarios muestran preferencias para períodos complementarios a las estrellas variables en general, tanto como a algunas semejanzas.

h) En general las Cefeídas son más brillantes que las Algols, pero estas muestran variabilidad más notables.

i) Parece que hay una relación matemática entre los períodos en todas las clases de variables.

La presencia de estas relaciones varias, entre los períodos, brillantez y variabilidad, en todas las clases, es un fuerte indicio de afinidad íntima de las clases, incluyendo las estrellas llamadas «binarias espectroscópicas».

Es una sorpresa encontrar estas relaciones y dependencias en las binarias espectroscópicas, porque la explicación binaria de estas estrellas fué generalmente aceptada.

Los desplazamientos de las líneas espectrales pueden ser explicados también por pulsaciones, y, las otras relaciones, tan generales ahora, indican su probabilidad. Es razonable suponer variación de luz con pulsaciones, y la constancia de las binarias espectroscópicas era un fuerte argumento para la explicación binaria. Pero recientemente ha sido observada aquí una estrella (γ de Carina), que muestra líneas del elemento helio, que cambian sus posiciones periódicamente, pero sin cambio sensible de la brillantez de la estrella. Esta y otras consideraciones han indicado la conveniencia de investigar las velocidades radiales que han sido interpretadas como de las estrellas compañeras, el elemento K. Sigue en la tabla III los resultados.

TABLA III

Binarias espectroscópicas. Elemento orbital K, según tipo espectral

Períodos	B y O	A	F	G	K	M	Promedio K	Número de estrellas
Luz constante :								
0^d11 a 0^d26.	19^k5 (4)	14^k (1)	8^k (1)				14^k	6
1.02 a 1.96.	82.1 (7)	72.0 (4)	17.3 (3)				57.	14
2.05 a 3.97.	90.1 (11)	59.4 (16)	52.5 (6)	36^k (1)			60.	34
4.00 a 5.97.	113.3 (7)	53.1 (7)	45.0 (4)	54.0 (3)			66.	21
6.07 a 7.99.	59.8 (10)	53. (1)	62. (2)		38^k (1)		53.	14
8.02 a 11.75.	16.3 (3)	39.8 (11)	37.0 (7)	10.5 (2)			26.	23
12.16 a 15.99.	120.8 (4)	42.0 (2)	51.8 (4)	29.3 (3)			61.	13
16.24 a 19.60.		40.5 (2)	35. (1)	30. (2)	30. (2)		34.	7
20.54 a 29.1..	65.2 (5)	62.6 (5)	47. (1)		19.5 (2)		49.	13
33. a 49....	36.3 (3)	41. (1)	21.0 (2)	34. (2)			33.	8
51. a 74....	30. (1)	36.5 (2)	23.2 (4)				30.	7
88. a 126....	35.7 (3)	32. (2)		26. (1)	28. (1)		30.	7
131. a 144....	36.2 (4)		27. (1)		23. (1)		29.	6
180. a 194....	64. (1)			23.5 (2)	16. (1)		34.	4
212. a 329....			18. (1)	18. (3)	18. (2)		18.	6
409. a 5588....		4.8 (2)	10.6 (2)	12.2 (7)	14.8 (6)	4.6 (2)	9.4	19
Promedio........	59.2	42.4	32.5	27.4	23.8	4:6		
Nº de estrellas ...	63	56	39	26	16	2		202
Cefeídas :								
1.95 a 4.43....			14.8 (4)	14.5 (2)				6
5.37 a 8.38....			17.7 (3)	18.7 (3)				6
10.15 a 17.12....				16.3 (3)				3
35.52....				19. (1)				1
Promedio........			16.2	17.1				16
Algols :								
0.33 a 0.65......			81. (1)	134. (1)				2
1.14 a 1.81......	134. (2)	87.5 (2)	29. (1)					5
2.05 a 2.45......	97.5 (2)	98.7 (2)						4
2.81 a 3.45......	100.5 (4)	66. (1)						5
3.95 a 4.80......	55.5 (2)		187.0 (2)					4
Promedio........	96.9	84.1	99.0	134.				20

Estos datos muestran aumentación del número de las estrellas y en el valor de K en la dirección de las clases espectrales M a B y O con algunas preferencias y valores diferentes de K para ciertos períodos.

Las Cefeídas tienen valores pequeños y casi uniforme de K mientras que para las Algols, los valores de K son mucho más grandes.

Estas condiciones parecen compatibles y más favorables para pulsaciones que para duplicidad.

RELACIÓN MATEMÁTICA DE LOS PERÍODOS

Después del descubrimiento de las preferencias para ciertos períodos, fué examinada la cuestión de si había o no relación matemática entre las preferencias. Ni una *sola serie* fué satisfactoria para las variables, pero cuando fueron examinados los períodos, arriba de 30 de las binarias, fueron reveladas preferencias no accidentales, las cuales podían ser arregladas en algunas series, cada término, siendo la mitad del término mayor.

Más abajo están los períodos (sin omisión alguna), más grande que 30 días, en orden mostrando preferencias evidentes.

34^{d}	38^{d}	52^{d}	70^{d}	88^{d}	97^{d}	107^{d}	
33	39	52	74			104	
	39.9	52	72				
	39·5	49	72				
	41						
126^{d}	144^{d}	181^{d}	212^{d}	245^{d}	284^{d}		
121	141	180		258	282		
117	138	194					
131	138	195					
	138						
411^{d}	497^{d}	665^{d}	750^{d}	818^{d}	973^{d}		
409		655		834	960		
				870	914		
1170^{d}	1375^{d}	1515^{d}	2117^{d}	3066^{d}	3504^{d}	3849^{d}	5588^{d}
			2175	3043			
			2190				

No solamente las preferencias, pero igualmente las lagunas o vacuidades, entre estas preferencias, confirman la realidad de algún sistema por sus métodos.

Cuando separados en algunas series estas preferencias muestran una razón de dos, como abajo :

2160d	3050d	3504d	3849d	5588d
1170	1515	**1680**	**1898**	**2750**
566	750	840	949	1375
283	**376**	410	497	660
140	188	212	252	**330**
72	97	106	124	**165**
		51	**62**	88
			33.5	39

NOTA. — Los guarismos en tipo grueso indican las lagunas.

Se encuentra en las lagunas pequeñas valores entre las estrellas variables de luz. Las lagunas grandes de 1680, 1898 y 2750 probablemente serán llenadas en el futuro por descubrimientos.

Relaciones análogas han sido encontrada en las variables de la Nube Chica de Magallanes.

También hay semejantes relaciones mostrado en los cúmulos globulares y las variables de clase β de Lyra.

Investigaciones de estas series indican que son verdaderas debido a alguna causa física, la cual es concebida ser un efecto de ondas en la atmósfera, una interferencia de una onda con otra.

Hay muchos otros puntos que tienen conexión íntima con esta cuestión requeriendo estudio prolijo, estudios que están ya empezados.

Tres deducciones generales resultan de esta investigación :

1ª Todas las variables de luz y velocidad están estrechamente vinculadas y requieren una sola explicación de la causa fundamental.

2ª La evidencia indica que la variabilidad es debida a oscilaciones diferenciales de dos o más fundas en la atmósfera de la estrella.

3ª Los períodos de estrellas variables parecen sujetos a algunas vibraciones que son fundamentales.

Estas observaciones conducen a la creencia que la variabilidad resulta de oscilaciones o pulsaciones en las atmósfera de las estrellas. Las preferencias y condiciones en general, tan complementarias de las Cefeídas y las Algols, indican que hay dos o talvez más ondas en una atmósfera extensa, las variaciones Algols siendo con ondas libres del mismo período oscilando al unísono, con una *aumentación* de luz y velocidad. Mientras que en las Cefeídas, las ondas tienen diferentes períodos, los cuales resultan en *disminuciones* de luz y velocidad.

Tales oscilaciones diferenciales proveen también una explicación de

la relación matemática entre los períodos, las interferencias, resultando en períodos más cortos, sucesivamente reducidas por mitades.

Para satisfacer las condiciones anotadas y proveer una teoría tentativa como base de investigación futura, ha sido formulada la siguiente hipótesis :

Hipótesis. — Toda variabilidad resulta de oscilaciones. Las progresiones siguen la dirección de largo a corto período y de « vieja » a « joven » tipos del espectro. Las oscilaciones ocurren en una funda extensa exterior a la fotósfera verdadera. Esta funda consiste de mucho material cósmico con suficiente cantidad vaporizada para dar las líneas de absorción.

En las clases « viejas » las temperaturas son bajas y las fundas extensas. Mientras progresan el tipo « joven » la temperatura sube y las partes que producen la absorción y luz cambian sus fases. Estos cambios de fases producen los diferentes tipos de variabilidad.

Puede esta hipótesis ser resumida como sigue :

Las variables nacen como las otras estrellas, cuerpos débiles con atmósferas o fundas extensas, principalmente de material cósmico según la teoría de Lockyer. En las regiones donde hay mucho de este material cósmico, probablemente una gran parte en nubecitas, en las inmediaciones de la Vía Láctea, colisiones, choques han producido oscilaciones en la funda, las cuales han aumentado en amplitud con reducción de período y cambio de espectro en la dirección de las clases « jóvenes ».

Con los períodos de 150 días más o menos, la amplitud ha disminuído apreciablemente, las oscilaciones se han estabilizado y la curva de luz ha cambiado a la de los « cortos períodos » o Ceféidas. En los períodos de 40 días aproximadamente entran las fases de los Algols y β de Lyra variables. Desde este punto las Ceféidas y Algols muestran preferencias complementarias.

Las estrellas con períodos más cortos que un día estan de inmediato mucho más débiles mientras las oscilaciones se acercan a extinción.

Las conclusiones de esta investigación son provisionales y tentativas, requiriendo estudios mucho más estensos para su debida aclaración.

Observatorio nacional argentino, enero de 1927.

ASIMETRÍA DE MOVIMIENTOS PARALÁCTICOS

Por C. D. PERRINE

Hace algunos años descubrí una asimetría en los movimientos propios de las estrellas de tipo espectral B. Los movimientos de estas estrellas en el hemisferio boreal fueron solamente la mitad de las del sur. En conexión con la preferencia de estas estrellas para la Vía Láctea y el movimiento solar, esta asimetría indica una diferencia sistemática entre los movimientos de las estrellas en las dos regiones, el Sol moviéndose con las estrellas del norte.

La importancia de esta asimetría en la determinación de las distancias de las Cefeídas ha inducido a una nueva investigación, ahora, con los movimientos paralácticos.

Los datos para las tablas I y II fueron sacados del *Boletín,* número 195, del Observatorio de Lick, los cuales están basados en el *Preliminary General Catalog de Boss.*

TABLA I

Estrellas de la clase B, norte

R. H. P. Número			Vis. Mag.	Obs. V	V_1	τ	υ
				km			
8143	21h13m5	+ 38°59′	4.3	— 7.	+ 4.6	+ ″006	+ ″005
8146	13.8	34 29	4.4	+ 11.	+ 22.4	+ 18	— 23
8238	27.4	70 7	3.3	— 5.	+ 4.9	0	— 12
8279	35.2	61 38	4.9	— 12.5	— 2.1	+ 13	— 48
8335	43.1	48 51	4.3	— 19.2	— 8.7	+ 3	— 4
8522	22 16.7	27 50	4.9	+ 9.	+ 16.5	0	— 5
8523	16.9	46 2	4.7	— 9.0	0	— 2	— 20
8541	20.4	48 58	4.6	— 25.7	— 16.8	+ 12	+ 7
8762	57.3	41 47	3.6	— 16.	— 9.4	+ 14	— 27

Estrellas de la clase B, norte *(conclusión)*

R. H. P. Número			Vis. Mag.	Obs. V	V₁	τ	υ
				km			
8797	23ʰ 2ᵐ4	+ 58°53′	4.9	— 2.0	+ 5.6	— ″007	— ″010
8926	25.4	58 0	4.9	— 14.8	— 8.2	— 17	— 22
9071	53.9	55 12	4.9	— 4.	+ 1.2	+ 2	— 12
153	0 31.4	53 21	3.7	+ 3.0	+ 6.4	— 1	— 23
154	31.5	33 10	4.4	+ 8.8	+ 8.6	— 2	— 23
226	44.3	40 32	4.4	— 23.9	— 23.4	+ 9	— 27
264	50.7	60 11	2.2	— 3.9	+ 0.6	— 11	— 29
335	1 3.7	46 42	4.3	— 4.	— 3.3	— 32	— 65
477	34.7	40 4	4.9	— 2.	— 0.3	+ 11	— 27
496	37.4	50 1	4.2	0	— 0.2	— 2	— 33
542	47.2	63 11	3.4	— 9.	— 6.7	— 2	— 42
936	3 1.7	40 34	2.1	+ 4.1	— 2.2	— 3	— 9
1034	20.9	48 43	4.9	+ 8.	+ 3.5	— 10	— 30
1035	21.0	59 36	4.4	— 5.	— 6.2	— 3	— 3
1040	21.9	58 32	4.8	— 6.	— 7.6	— 9	— 6
1123	36.0	33 39	5.0	+ 3.	— 6.7	— 3	— 15
1131	38.0	31 58	3.9	+ 18.5	+ 8.2	+ 4	— 26
1203	47.8	31 35	2.9	+ 20.4	+ 9.7	— 3	— 21
1204	48.6	+ 62 47	4.9	+ 5.	+ 4.1	— 5	— 1
			4.22	9.2	7.1	— ″0007	— ″0196

TABLA II

Estrellas de la clase B, sur

R. H. P. Número			Vis. Mag.	Obs. V	V¹	τ	υ
				km	km		
3642	9ʰ 4ᵐ8	— 70° 8′	4.9	+ 26.	+ 6.3	+ ″001	— ″008
3654	7.4	44 27	5.0	+ 35.	+ 13.7	— 1	— 14
3659	8.4	58 33	3.6	+ 23.3	+ 2.5	19	— 36
3663	9.0	61 54	4.2	+ 16.	— 4.5	— 11	— 45
3734	19.0	54 35	2.6	+ 21.9	+ 1.2	— 10	— 19
3825	31.5	58 47	4.2	+ 21.7	+ 1.6	+ 7	— 16
3856	36.6	60 53	4.7	+ 26.	+ 6.2	+ 9	— 38
3940	53.4	54 6	3.7	+ 14.4	— 5.1	— 8	— 21
4074	10 17.2	55 33	4.6	+ 9.	— 9.6	— 1	— 18
4118	25.0	30 5	5.6	+ 25.	+ 8.4	0	— 45
4140	28.5	61 11	3.6	+ 24.	+ 5.8	+ 5	— 25
4198	38.9	58 42	5.4	0	— 17.8	— 20	0

Estrellas de la clase B, sur *(conclusión)*

R. H. P. Número			Vis. Mag.	Obs. V	V_1	τ	υ
				km	km		
4199	$10^h 39^m.4$	— 63°52′	3.0	+ 16.	— 1.8	+ ″008	— ″023
4234	44.8	80 1	4.6	+ 22.	+ 4.8	— 15	— 46
4460	11 30.0	53 42	4.8	+ 12.	— 3.5	+ 12	— 64
4467	31.2	62 28	3.3	+ 11.	— 5.1	— 15	— 45
4552	47.8	33 21	4.4	— 20.	— 32.0	+ 18	— 53
4618	12 2.9	50 6	4.8	+ 16.4	+ 2.8	+ 5	— 29
4638	6.4	51 48	4.2	+ 28.	+ 14.3	— 5	— 49
4656	9.8	58 12	3.1	+ 25.	+ 10.7	— 4	— 47
4679	13.0	63 26	4.3	+ 19.9	+ 5.1	— 5	— 50
4730	21.0	62 33	1.6	+ 7.	— 7.4	— 18	— 43
4798	31.2	68 35	2.9	+ 13.5	— 1.3	— 8	— 41
4817	34.4	39 26	4.8	+ 13.	+ 2.8	— 16	— 61
4823	36.2	59 8	5.0	+ 19.5	+ 6.1	— 2	— 25
4848	40.6	55 56	4.9	+ 18.2	+ 5.4	— 20	— 51
4853	41.9	59 9	1.5	+ 13.	— 0.2	— 5	— 56
4898	48.8	56 38	4.3	+ 13.2	+ 0.7	+ 3	— 36
4899	48.8	56 37	5.5	+ 7.	— 5.5	— 6	— 26
5132	13 33.5	52 57	2.6	+ 6.	— 4.0	— 4	— 41
5190	43.5	41 11	3.5	+ 6.	— 0.9	+ 2	— 42
5193	43.6	41 59	3.3	+ 12.6	+ 5.5	— 1	— 28
5210	46.0	32 30	4.7	+ 14.1	+ 9.4	— 1	— 60
5221	47.5	31 26	4.8	+ 8.	+ 3.7	— 5	— 28
5248	52.2	41 36	4.0	+ 5.3	— 1.2	+ 2	— 34
5249	52.5	44 19	4.2	+ 4.	— 3.2	— 3	— 46
5267	56.8	59 53	0.9	+ 12.	+ 1.3	— 8	— 40
5285	59.9	40 42	4.5	+ 12.4	+ 6.5	— 13	— 36
5358	14 13.3	55 56	4.4	+ 3.5	— 5.7	+ 1	— 32
5378	16.8	39 3	4.6	+ 9.2	+ 4.5	— 9	— 48
5395	19.7	44 46	4.6	— 16.6	— 22.7	— 14	— 28
5425	25.9	50 1	4.6	— 0.6	— 7.8	+ 28	— 46
5440	29.2	41 43	2.6	0	— 4.8	0	— 49
5469	35.3	46 58	2.9	+ 8.	+ 2.0	— 3	— 36
5528	45.1	43 9	4.5	+ 7.2	+ 2.7	+ 4	— 50
5571	52.0	42 44	2.8	0	— 4.1	+ 4	— 6
5576	52.7	41 42	3.4	+ 10.	+ 6.2	— 7	— 35
5687	15 12.4	40 26	5.8	+ 21.	+ 18.3	+ 1	— 41
5708	15.9	44 20	3.7	+ 14.	+ 10.3	0	— 28
5781	29.0	44 37	4.8	+ 5.	+ 1.7	— 16	— 36
5839	26.3	34 23	4.8	+ 12.	+ 12.0	+ 8	— 48
5928	50.7	28 55	4.0	+ 3.2	+ 5.4	— 4	— 33
5967	56.8	— 38 19	5.0	+ 5.	+ 4.5	+ 7	— 43
			4.04		6.4	— ″0029	— ″0379

La tabla III muestra la comparación entre las estrellas del norte y sur.

TABLA III

Estrellas de la clase B

Límites de la ascensión recta	Número de estrellas	Vis. Mag.	V_1	τ	υ
			km		
Norte :		2			
21^h a 4^h	28	4.32	7.1	—″0007	—″0196
Sur :					
9^h a 16^h	53	4.04	6.4	— 0029	— 0379

υ es el componente paralelo a la dirección del movimiento solar y τ es el componente en ángulo recto con el movimiento solar.

Además de las estrellas de tipo B, esta asimetría ha sido encontrada en todas las estrellas del *Preliminary General Catalog de Boss*, con movimientos pequeños, por los menos. También está revelada en la discordancia en δ del ápice del movimiento solar derivada de movimientos propios, y parece tener alguna relación con las correcciones sistemáticas con varios de los catálogos viejos.

Por estas razones, parece que este fenómeno es más o menos general, y tal asimetría debe afectar a las Cefeídas también. En tal caso es obvio que las distancias conseguidas por medio de movimientos paralácticos y la velocidad solar aceptada, serán dudosas. Para averiguar este punto, los movimientos propios fueron determinados para todas las Cefeídas del sur, posibles para comparación con las del norte. Se tropieza con el gran inconveniente de que la mayor parte de las Cefeídas son débiles. Por eso hay pocas observaciones exactas para la determinación de los movimientos propios. Veinte y cuatro Cefeídas fueron encontradas con suficientes observaciones y los resultados están incluídos en la tabla IV.

TABLA IV

Cefeidas variables del sur

Catálogo		Magnitud		Espectro	Período	α 1900.0	δ 1900.0	μ				
A. G. C.	V. J. S.	Máx.	Mín.					α	δ			
10196	2139	7.0	8.5	Kop	41^{d}3	8^{h} 9^{m}2	—34°16″6	+^{s}0004	—″060	″060	—″060	+″006
11451	2145	7.4	8.1	G5	6.7	8 26.7	59 47.3	— 14	— 20	.023	— 23	+ 3
11634	2147	7.5	8.6	Ko	Kurz	8 33.4	43 45.9	— 44	— 34	.059	— 43	— 40
11668	2148	7.7	8.5	G5	4.6	8 34.4	47 0.7	— 6	— 55	.055	— 54	+ 9
12793	2166	7.5	8.2	G5	4.4	9 19.2	55 32.0	+ 8	— 18	.020	— 16	+ 13
13336	2181	3.6	4.8	Gop	35.5	9 42.5	62 2.8	— 40	— 12	.030	— 19	— 23
14701	2282	7.8	9.2	G5	19.0	10 40.6	57 2.4	+ 31	— 40	.047	— 41	+ 23
15004	2333	6.8	8.0	Go	38.7	10 53.7	59 11.8	— 15	0	.012	+ 1	— 12
16671	2403	6.4	7.3	F8p	9.7	12 7.4	69 35.7	— 26	— 6	.015	— 3	— 15
16832	2408	6.8	7.6	Go	6.7	12 15.9	61 43.6	— 30	0	.021	+ 8	— 20
16882	2411	6.8	7.9	F5	5.8	12 18.1	61 4.5	— 18	— 40	.042	— 33	— 26
17263	2425	6.7	7.6	G5	0.9	12 36.0	68 51.5	— 15	+ 24	.025	+ 25	+ 1
17531	2434	6.5	7.6	F5	4.7	12 48.4	57 53.3	+ 2	— 22	.022	— 21	— 8
19641	2509	6.4	7.8	F5	5.5	14 25.4	56 26.7	— 12	— 29	.031	— 13	— 28
20693	2528	6.7	7.4	F5	3.4	15 10.8	66 7.7	— 45	— 19	.033	+ 10	— 31
21614	2550	6.4	7.4	G5	6.3	15 52.2	63 29.5	— 36	— 18	.030	+ 13	— 27
21762	2559	7.7	8.4	F5	2.6	15 58.4	62 38.3	— 15	— 49	.050	— 13	— 48
22031	2573	6.4	7.6	Gop	9.8	16 10.6	57 39.2	— 37	— 25	.039	— 18	— 35
22956	2645	6.9	8.0	F5	6.1	16 51.8	33 27.2	— 29	— 15	.039	+ 30	— 24
24120	2682	4.4	5.0	F9p	7.0	17 41.3	27 47.6	+ 17	— 9	.025	— 24	— 7
24212	2685	7.5	9.0	G5	20.3	17 44.3	33 40.5	— 14	— 16	.024	+ 17	— 17
24306	2691	7.5	8.2	Ao	0.9	17 48.6	34 12.9	+ 48	— 29	.067	— 62	— 26
24577	2711	4.3	5.1	Gop	7.6	17 58.6	29 35.1	+ 36	— 50	.069	— 48	— 50
24788	2733	6.8	7.4	F5	5.1	18 7.0	—23 8.5	— 26	— 48	.060	+ 38	— 47
		6.65	7.63		10.8						—.015	—.018
								Omitiendo primeras siete...			—.005	—.025
								Primeras siete...			—.037	—.001

Estos resultados han sido derivados de los catálogos de Gould en comparación con los de Albany, Cape y Córdoba de 1900 y de La Plata de 1925. Las correcciones sistemáticas de Boss han sido aplicadas.

La comparación con las Cefeídas del norte está incluída en la tabla V.

TABLA V

Asimetría de movimientos paralácticos Cefeídas

Ascensión recta	Número de estrellas	Magnitud del medio	Período	Velocidad radial	τ	υ	υ corregida
				km			
Norte :							
$17^h 41^m$ a $6^h 58^m$	11	4.75	$6^d 0$	8.4	—″0020	—″0157	
	10 (1)	5.02	6.2	8.8	—.0006	—.0132	
Sur :							
8^h a 19^h	24	7.14	10.8		— .015	— .018	— ″057
	17 (2)				— .005	— .025	— .080
	7 (3)				— .037	— .001	

La asimetría en las estrellas B (tabla III), es evidente a la primera vista. No es así con las Cefeídas, porque hay una diferencia de más que dos magnitudes entre las estrellas del norte y sur. Según la ley de Período-luminosidad, esta diferencia puede ser debida únicamente a la distancia más grande de las Cefeídas del sur. En la última columna de la tabla V los componentes υ de las estrellas del sur han sido corregidos para esta diferencia de magnitud y también para la diferencia de período.

La comparación de estos componentes corregidos con las estrellas del norte, demuestran la misma asimetría que las estrellas del tipo B y que aparece en general en el *Preliminary General Catalog de Boss* y otros lugares.

Es obvia la imposibilidad de conseguir distancias de movimientos paralácticos, tan inciertos como estos, en combinación con cualquier velocidad solar fija.

Observatorio nacional de Córdoba, enero de 1927.

(1) Omitiendo la Osa Menor α.

(2) Omitiendo siete estrellas de componente υ no sensible.

(3) Siete estrellas con componente υ no sensible.

DISTANCIAS

DE

LAS NUBES DE MAGALLANES Y CÚMULOS GLOBULARES

Por C. D. PERRINE

En los Cúmulos globulares, las estrellas no variables y más brillantes, son casi iguales en luminosidad, siendo esencialmente de tipos F y G. Esta condición prevalece en tantos cúmulos que es indudablemente la ley en estos objetos, y provee un método exacto en conexión con semejantes estrellas en nuestro sistema, para conseguir las distancias de los Cúmulos Globulares.

Este método está necesariamente basado en la suposición que en nuestro sistema la misma condición prevalece, que estrellas de estos tipos son casi iguales en magnitud absoluta. Se acumulan pruebas de que tal es la verdadera condición, no solamente en nuestro sistema, sino en todo el Universo y hasta en otras clases espectrales que F y G.

En verdad, recientes investigaciones de varios astronómos, demuestran que hay una relación más o menos íntima entre el tipo espectral y la luminosidad de una estrella. He investigado el problema hasta el punto de asegurar que en los tipos O y B también prevalece tal relación, no parece tan exacta como en los tipos F y G, pero bastantes seguros para uso en casos en que faltan seguridad en la identificación de las estrellas de tipos F y G y para confirmación.

Esta relación entre tipo espectral y luminosidad absoluta, y la ley llamada Período-luminosidad, descubierta por la señorita Leavitt de Harvard, proporcionan una base de confianza para la determinación de distancias, no solamente de las Nubes de Magallanes, Cúmulos globulares y Nebulosas espirales, sino también de estrellas más próximas, en nuestro sistema.

Con estas relaciones basta tener el tipo espectral y magnitud *aparente* para conseguir la distancia que corresponde.

En la tabla I se incluyen los resultados de varias estrellas en las Nubes de Magallanes y siete Cúmulos globulares, en comparación con estrellas de los mismos tipos de nuestro sistema galáctico. Estos resultados muestran casi las mismas diferencias entre tipos espectrales, tanto en las estrellas galácticas como en los Cúmulos y Nubes de Magallanes.

TABLA I

Diferencias de las magnitudes absolutas en el sistema galáctico y Nubes de Magallanes

	Cúmulos globulares (7)	Nube Chica	Nube Grande
Estrellas brillantes no variables :			
Espectro	F 6	B y O	O
Magnitud fotográfica	+ 13.8	+ 11.2 (10)	+ 10.8 (9)
Cefeída (P 6^d0) (Mag. media).	+ 13.1 (328)	+ 15.9 (106)	+ 15.7
Cefeídas, brillantez..........	+ 0.7	— 4.7	— 4.9
Estrellas galácticas para comparación :			
Brillantez F, 6 — G_0.......	— 0.5		
» B, 5 — G_0		— 4.1	
» O. — G_0			— 4.4

Los resultados para los Cúmulos globulares fueron extraídos de una investigación por Shapley (1).

La magnitud 15,9 de las Cefeídas de la Nube Chica fué sacada de la Circular número 280 de Harvard. La magnitud 13,1 de las Cefeídas en los Cúmulos fué obtenida de la investigación de Shapley corregida a un período de 6^d0 por medio de su curva de Período-luminosidad.

La magnitud de las Cefeídas en la Nube Grande, 15,7, fué derivada de una comparación de 250 variables en cada Nube de las tablas de la señorita Leavitt en *Harvard Annals*, volumen LX, parte 4ª, en la suposición de períodos semejantes.

Las magnitudes de las estrellas O y B en las dos Nubes, son del Catálogo de Draper de Harvard y de fotografías hechas aquí.

(1) *Astrophysical Journal*, **48**, 89, 1918.

Las magnitudes de las estrellas galácticas han sido sacadas de la figura 6 del artículo *Stellar Luminosities* por H. D. Curtis (1).

Este diagrama fué derivado de paralajes directamente medidas, de unas dos mil estrellas y son las más exactas que existen.

De esta investigación de Curtis resultan dos conclusiones :

a) El cambio de luminosidad con tipo espectral es una curva, y el cambio rápido en los tipos K y M llega a ser más o menos cero en los tipos B y O;

b) Preferencia para magnitudes con amplitudes de 2 o 2,5.

De una curva entre las más preferidas de estas magnitudes he determinado las siguientes magnitudes absolutas de las clases espectrales.

Tipo espectral	Magnitud absoluta
B_0	+ 0.9
B_5	+ 1.2
A_0	+ 1.6
A_5	+ 2.0
F_0	+ 2.6
F_5	+ 3.4
G_0	+ 4.3
G_5	+ 5.4
K_0	+ 6.4
K_5	+ 7.6
M_0	+ 9.4

El tipo G_0 fué escogido por ser del tipo del Sol y al mismo tiempo más o menos el tipo promedio de las Cefeídas.

Las estrellas galácticas de tipos B y O fueron corregidas por — 1.0 magnitud para equilibrarlas con las de las Nubes.

En las Nubes parece que hay una amplitud de 2 o 2,5 magnitudes en estos tipos B y O, y las observadas y usadas son las más brillantes.

En mi opinión, las magnitudes absolutas obtenidas de desplazamientos paralácticos son demasiado brillantes, talvez tanto como una magnitud para los tipos G y más «temprano». Esta opinión resulta de la consideración de que ninguna paralaje puede ser demasiado *larga,* pero sí demasiado pequeña para una cantidad desconocida.

Si el Sol es una estrella regular de tipo G_0, entonces tal conclusión es confirmada por esta curva de Curtis, según la cual el tipo G_0 es de 1,0 $\pm$ magnitud más brillante que la magnitud bien conocida del Sol.

(1) *Publications Astronomical Society of the Pacific,* volumen XXXIV, página 33, del año 1922.

Como la diferencia entre los tipos B-O y G_0 en las Nubes de Magallanes y en nuestro sistema galáctico son esencialmente las mismas, es una prueba concluyente de que las condiciones físicas son semejantes en todos los sistemas y permiten sus usos para determinar distancias.

La tabla II muestra los resultados de tales determinaciones.

TABLA II

Distancias derivadas de las estrellas brillantes (no variables)

	Cúmulos globulares	Nube Chica	Nube Grande
Promedios de magnitudes fotográficas de estrellas brillantes	+ 13.8	+ 11.2	+ 10.8
Magnitud fotográfica absoluta de las estrellas galácticas al mismo tipo espectral	+ 3.6	+ 0.9	+ 0.9
Diferencia	10.2	10.3	9.9
Distancia relativa	110	115	96
Paralaje	0″00091	0″00087	0″00104
Distancias en años de luz	3600	3800	3100
Tipo espectral	F 6	B y O	O

Estas distancias están en completo desacuerdo con las obtenidas por medio de la ley de Período-luminosidad. Las distancias obtenidas en la tabla II son solo aproximadamente 1/30 de las derivadas por las Cefeídas. En vez de 105.000 años de luz para la Nube Chica, calculada por Shapley (1) por medio de las Cefeídas y la ley de Período-luminosidad, las estrellas de tipo B y O dan solamente 3800 años. Las estrellas de B y O muestran diferencias debidas a distancias de 10 magnitudes, mientras Shapley obtiene 17 — por medio de las Cefeídas. Esta investigación indica una corrección a la curva de Shapley de 7 magnitudes.

La causa de esta discordancia está investigada en el artículo sobre una asimetría en los movimientos propios.

Observatorio nacional de Córdoba, enero de 1927.

(1) *Harvard Circular*, número 280.

SOBRE LA INTEGRACIÓN GRÁFICA

DE LAS

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

POR EL INGENIERO J. BABINI

Un método de integración gráfica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, consiste, como es sabido, en substituir los arcos de la curva integral por los arcos de los círculos osculadores correspondientes a los puntos iniciales de los mismos, cometiéndose, por lo tanto, un error del tercer orden respecto al incremento de la variable.

En esta nota veremos como algunas modificaciones a ese método permiten obtener curvas integrales aproximadas con errores del cuarto orden respecto al incremento de la variable.

Sea, como siempre, $y'' = f(xyy')$ la ecuación diferencial dada. Si las condiciones iniciales de la curva integral buscada, son :

$$x = x_0, \qquad y = y_0 \qquad y' = y_0',$$

podemos escribir

$$y = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}f + \frac{h^3}{3!}f' + \frac{h^4}{4!}f'' + ...,$$

donde h representa el incremento de la variable y f, f', f'', ..., los valores que toma la $f(xyy')$ y sus derivadas sucesivas respecto a x en el punto inicial.

Consideremos ahora un círculo de radio r que en el punto inicial tenga con la curva integral un contacto de primer orden. Si con Y y con t indicamos su ordenada y parámetro respectivamente, tendremos :

$$\left.\begin{aligned} Y &= y_0 + r(\text{sen}\, t - \text{sen}\, t_0) \\ x &= x_0 + r(\cos t - \cos t_0) \end{aligned}\right\} \qquad Y_0' = y_0'.$$

Como las derivadas sucesivas de Y respecto a x serán :

$$Y' = r \cos t \frac{dt}{dx} = -\operatorname{ctg} t, \qquad Y'' = -\frac{1}{r \operatorname{sen}^3 t},$$

$$Y''' = -\frac{3 \cos t}{r^2 \operatorname{sen}^5 t}, \qquad Y^{IV} = -\frac{3(1+4\cos^2 t)}{r^3 \operatorname{sen}^7 t},$$

. . . .

podremos escribir

$$Y = y_0 + hy_0' - \frac{h^2.}{2r \operatorname{sen}^3 t_0} - \frac{h^3 \cos t_0}{2r^2 \operatorname{sen}^5 t_0} - \frac{h^4(1+4\cos^2 t_0)}{8r^3 \operatorname{sen}^7 t_0} \dots$$

y el error cometido al tomar como curva integral el círculo, será :

$$\Delta y = \frac{h^2}{2}\left(f + \frac{1}{r \operatorname{sen}^3 t_0}\right) + \frac{h^3}{3!}\left(f' + \frac{3\cos t_0}{r^2 \operatorname{sen}^5 t_0}\right) +$$
$$+ \frac{h^4}{4!}\left(f'' + \frac{3(1+4\cos^2 t_0)}{r^3 \operatorname{sen}^7 t_0}\right) + \dots \quad (1)$$

Estudiemos ahora los valores que toma la expresión $c = \frac{Y''}{(1+Y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ en los puntos del círculo osculador a la curva integral en el punto inicial, tomando para Y' el coeficiente angular de la tangente al círculo, y para Y'' el valor que toma la $f(xYY') = F(t)$.

Si ρ_0 es el radio de este círculo, tendremos :

$$c = -F(t) \operatorname{sen}^3 t$$

$$c' = \frac{F'(t) \operatorname{sen}^3 t + 3F(t) \operatorname{sen} t \cos t}{\rho_0}$$

$$c'' = -\frac{F''(t) \operatorname{sen}^2 t + 5F'(t) \operatorname{sen} t \cos t + 3F(t)(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)}{\rho_0^2 \operatorname{sen t}}, \dots,$$

y como

$$\frac{1}{\rho_0} = -f \operatorname{sen}^3 t_0, \qquad F(t_0) = f, \qquad F'(t_0) = \frac{f'}{f \operatorname{sen}^3 t_0},$$

tendremos :

$$c_0 = -f \operatorname{sen}^3 t_0, \qquad c_0' = -(f' + 3f^2 \operatorname{sen} t_0 \cos t_0) \operatorname{sen}^3 t_0,$$

$$c_0'' = -[F''(t_0) f^2 \operatorname{sen}^4 t_0 + 5ff' \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 +$$
$$+ 3f^3 \operatorname{sen}^2 t_0 (\cos^2 t_0 - \operatorname{sen}^2 t_0)] \operatorname{sen}^3 t_0 \dots$$

Si se substituye ahora el arco de curva integral por el círculo cuyo radio r sea el valor que toma $\frac{1}{c}$ en el extremo del *primer tercio* del intervalo, es decir, hacemos :

$$\frac{1}{r} = c_0 + \frac{h}{3} c_0' + \frac{h^2}{18} c_0'' + \ldots,$$

de acuerdo a la fórmula (1) el error cometido será :

$$\Delta y = \frac{h^2}{2}\left(f + \frac{c_0}{\operatorname{sen}^3 t_0}\right) + \frac{h^3}{3\,!}\left(f' + \frac{c_0'}{\operatorname{sen}^3 t_0} + \frac{3c_0^2 \cos t_0}{\operatorname{sen}^5 t_0}\right) +$$

$$+ \frac{h^4}{4\,!}\left(f'' + \frac{2c_0''}{3 \operatorname{sen}^3 t_0} + \frac{8c_0 c_0' \cos t_0}{\operatorname{sen}^5 t_0} + \frac{3c_0^3 (1 + 4 \cos^2 t_0)}{\operatorname{sen}^7 t_0}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{h^4}{4\,!}\left(f'' - \frac{2F''(t_0) f^2 \operatorname{sen}^4 t_0}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{14 f f' \operatorname{sen} t_0 \cos t_0}{3} + f^3 \operatorname{sen}^2 t_0 (8 \cos t_0 - 1)\right) + \ldots,$$

es decir, del cuarto orden.

Evidentemente para la derivada de la función buscada, el error cometido será del tercer orden.

La integración gráfica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden por este método, que llamaremos *metodo del primer tercio,* será como sigue (fig. 1) : Sea A_0 el punto inicial de la curva integral y A_0C_0 la normal en ese punto, calculemos analítica o gráficamente $\frac{1}{f}$ y llevemos su valor sobre una paralela al eje de las y a partir de A_0 hacia arriba o hacia abajo, según sea ese valor positivo o negativo. Si A_0B_0 es el segmento representativo de $\frac{1}{f}$, la construcción de la figura permite pasar de B_0 al centro de curvatura C_0. Con ese centro se traza el círculo osculador hasta encontrar la paralela al eje de las y correspondiente al primer tercio del intervalo h elegido, en ese punto A_0' se calcula el valor de $\frac{1}{f}$ tomando para y' el valor de la pendiente de la tangente al círculo osculador. Con ese valor de $\frac{1}{f}$ llevado sobre $A_0'B_0'$ se determina como antes el centro C_0' que se transporta sobre C, tomando $C_0C = C_0C_0'$. La circunferencia que pasa por A_0 y de centro C determina sobre el exremo del intervalo h un nuevo punto A_1 de la curva integral, en el cual la normal es A_1C.

Si comparamos este método con los métodos comunes vemos :

a) Si se toma como curva integral el arco de círculo osculador en el punto inicial, es decir, se hace $\frac{1}{r} = c_0$, el error será :

$$\Delta y = \frac{h^2}{2}\left(f + \frac{c_0}{\operatorname{sen}^3 t_0}\right) + \frac{h^3}{3\,!}\left(f' + \frac{3c_0^2 \cos t_0}{\operatorname{sen}^5 t_0}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{h^3}{3\,!}(f' + 3f^2 \operatorname{sen} t_0 \cos t_0) + \ldots \qquad (2)$$

del tercer orden, mientras que si

Figura 1

b) Se toma para r la media de los valores que adopta el radio de curvatura en los extremos del intervalo h, es decir,

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\rho_0 + \rho_1} = \frac{2c_0c_1}{c_0 + c_1} = \frac{2c_0\left(c_0 + hc_0' + \frac{h^2}{2}c_0'' + \ldots\right)}{2c_0 + hc_0' + \frac{h^2}{2}c_0'' + \ldots} = c_0 + \frac{h}{2}c_0' + \ldots$$

el error será

$$\Delta y = \frac{h^2}{2}\left(f + \frac{c_0}{\operatorname{sen}^3 t_0}\right) + \frac{h^3}{3!}\left(f' + \frac{3c_0^2 \cos t_0}{\operatorname{sen}^5 t_0} + \frac{3c_0'}{2 \operatorname{sen}^3 t_0}\right) + \ldots =$$

$$= -\frac{h^3}{2 . 3!}(f' + 3f^2 \operatorname{sen} t_0 \cos t_0) + \ldots, \qquad (3)$$

también de tercer orden, pero algo menor que en el caso anterior. Igual exactitud se lograría si

c) se toma para c el valor correspondiente al punto medio del intervalo, pues sería :

$$c = c_0 + \frac{h}{2} c_0' + \frac{h^2}{8} c_0'' + \ldots$$

Observando las fórmulas (2) y (3) vemos que los términos de tercer orden son de signo contrario y uno doble del otro, de ahí que podemos obtener igual exactitud que en el método del primer tercio tomando como ordenada (y derivada) en el extremo del intervalo h la ordenada (y derivada) del círculo osculador más los $\frac{2}{3}$ de la diferencia entre las ordenadas (y las derivadas) del círculo de radio medio y del círculo osculador. En efecto, llamando y_1 e y_2 las ordenadas de esos dos círculos en el extremo del intervalo

$$y_1 + \frac{2}{3}(y_2 - y_1) = \frac{y_1 + 2y_2}{3} = y + \frac{h^4}{4!}(\ldots) + \ldots \qquad (4)$$

Esta fórmula es, en cierto modo, para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, una generalización de la fórmula de Runge para las ecuaciones diferenciales de primer orden.

La integración gráfica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden utilizando este método que llamaremos *método de Runge* será entonces como sigue (fig. 2) : Tomando como antes el centro de curvatura C_0 se traza el círculo osculador que determinará el punto A_1' en la ordenada extrema del intervalo. Tomando el valor de $\frac{1}{f}$ correspondiente a ese punto sobre $A_1'B_1'$, se obtiene el centro C_1' que se transporta sobre C_1'', tomando $C_0C_1' = C_0C_1''$. Con centro en el punto C medio de C_0C_1'' se traza una circunferencia que pasa por A_0 y que determina sobre la ordenada extrema otro punto A_1''. El punto A_1 obtenido tomando a partir de A_1' los $\frac{2}{3}$ de $A_1'A_1''$ es un nuevo punto

de la curva integral. Para obtener la tangente en ese punto basta recordar que su ecuación es

$$y - \frac{y_1 + 2y_2}{3} = \frac{m_1 + 2m_2}{3}(x - x_1),$$

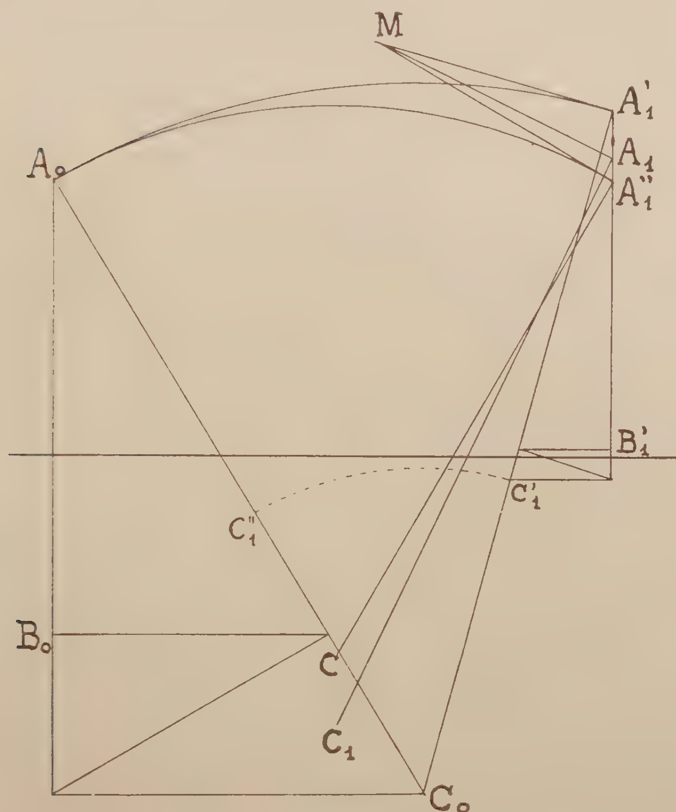


Figura 2

siendo y_1 e y_2 las ordenadas de A_1' y A_1'' y x_1 su abscisa. Como las ecuaciones de esas tangentes son

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \qquad y - y_2 = m_2(x - x_1),$$

las tres tangentes son concurrentes en un punto M, lo que permite la determinación de la tangente en A_1, y por lo tanto, de la normal A_1C_1.

Pero es preferible utilizar el método del primer tercio porque con menor trabajo se llega a igual grado de exactitud, obteniéndose la curva integral por arcos de círculos que empalman uno con otro mien-

tras que con el método de Runge solo se obtienen de la curva integral puntos y tangentes.

Además para aplicar el segundo método en el caso en que el punto inicial sea de inflexión no puede tomarse el radio medio, pues este también se hace infinito, y hay que tomar en cambio el radio correspondiente al punto medio del intervalo.

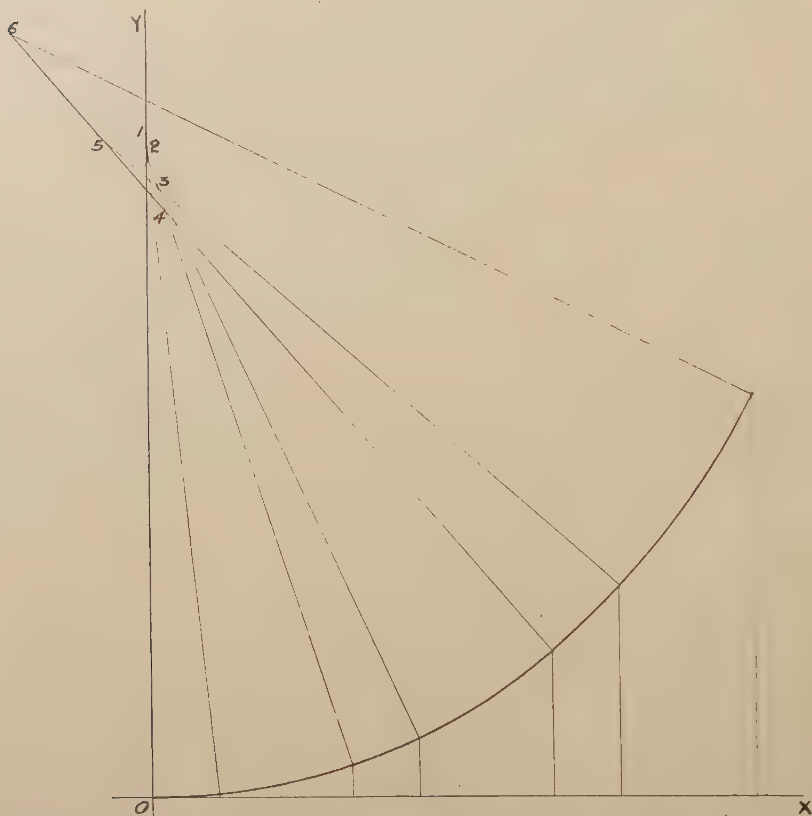


Figura 3

En la figura 3 está integrada gráficamente la ecuación diferencial $y'' = 4y + x^2 + 1$ con las condiciones iniciales $x_0 = y_0 = y_0' = 0$ por el método del primer tercio. En ella están dibujados únicamente los centros 1, 2, 3, 4, 5, 6 de los círculos trazados obteniéndose, para el punto final de la abscisa $x_1 = 0{,}9$ un valor de la ordenada $y_1 = 0{,}595$, mientras que el valor exacto deducido de la integral correspondiente

$$y = \frac{3Sh^2x - x^2}{4} \qquad \text{da} \qquad y_1 = 0{,}588.$$

Un caso particular en el cual el método del primer tercio puede resultar ventajoso es en la determinación gráfica de la línea elástica partiendo directamente del diagrama de los momentos flectores.

Sabemos que la ecuación diferencial de la línea elástica es

$$y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \frac{M(x)}{EI}.$$

y que en la práctica se obtiene por una doble cuadratura substituyéndola por

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}.$$

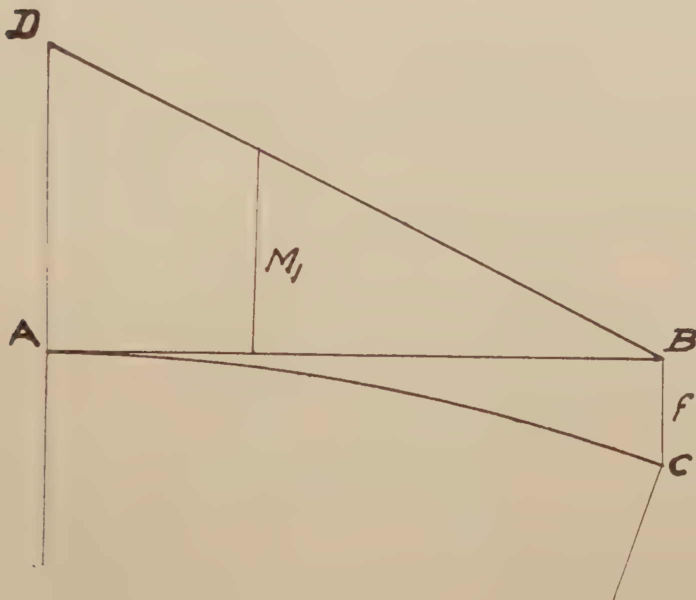


Figura 4

cometiendo pues un error del segundo orden, excepto el caso en que en el punto inicial $y_0' = 0$ caso en el cual el error es entonces del cuarto orden.

Si se aplica en cambio el método del primer tercio, el error será siempre del cuarto orden y el arco de línea elástica comprendido en el intervalo $(x_0\, x_0 + h)$ será un arco de círculo de radio

$$\rho = \frac{EI}{M\left(x_0 + \frac{h}{3}\right)},$$

que se deducirá fácilmente del diagrama de momentos flectores mediante una simple proporción gráfica.

Si m_1 es el módulo de las longitudes, m_2 el de las ordenadas de la elástica, m_3 el de los momentos y m_4 un segmento medio proporcional entre los segmentos representativos de M y ρ entre esos módulos deberá verificarse la relación

$$m_1{}^2 m_3 \mathrm{EI} = m_2 m_4{}^2.$$

En la figura 4 está resuelto el caso muy simple de una viga empotrada en la extremidad A y cargada en la extremidad B. Si DB es el diagrama de momentos y M_1 el momento correspondiente al primer tercio, se determina fácilmente el radio correspondiente con el cual se traza el arco AC que representa aproximadamente la línea elástica. El valor de la flecha máxima f obtenida por este método es 1,7, mientras que el valor dado por la fórmula conocida es 1,66.

Santa Fe, marzo de 1927.

SOBRE

LAS GENERALIZACIONES DE LA NOCIÓN DE DERIVADA SEGUNDA

POR J. C. VIGNAUX

INTRODUCCIÓN

1. Se define generalmente, la derivada segunda de una función $f(x)$ derivable, como la derivada de la derivada primera cuando ella existe. Esta definición resulta en consecuencia, muy restringida desde que ella implica no solamente la existencia y continuidad de la derivada primera, sino también la existencia del límite de la relación incremental correspondiente a la nueva función $f'(x)$.

De la derivada segunda de una función, se dan dos definiciones distintas, sin pasar por intermedio de la derivada primera; como límite de ciertas expresiones, las cuales contienen como caso particular la noción ordinaria.

En el presente trabajo estudiaremos estas definiciones y estableceré la relación que existe con una nueva definición de derivada segunda que propongo, la cual constituye, como aquélla, una amplia generalización de la noción clásica.

2. La derivada primera de una función continua está definida como límite del cociente de la diferencia primera de la función por la diferencia de la variable,

$$\frac{\Delta f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Consideremos del mismo modo, el cociente de la diferencia segunda de la función

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2h) - 2f(x - h) + f(x),$$

por el cuadrado de la diferencia de la variable

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2}. \qquad (1)$$

Llamaremos *leibniziana* de la función $f(x)$ en el punto x el límite cuando existe, de la expresión (1) para $h \to 0$. Si este límite existe en todo punto x del intervalo (a, b) en el cual está definida la función $f(x)$; la leibniziana es una nueva función que representaremos con la notación $\mathrm{L}f(x)$.

La definición de leibniziana contiene como caso particular la noción de derivada segunda, en virtud del teorema siguiente.

TEOREMA I. — *Si la función $f(x)$ admite una derivada segunda finita en el punto ξ, existe también la leibniziana $\mathrm{L}f(\xi)$ en el mismo y son iguales. La recíproca no se cumple necesariamente.*

Dini ha demostrado este teorema, suponiendo la existencia de $f''(x)$, no solamente en el punto ξ, sino también, en un entorno del mismo; mientras Harnach ha logrado probar con sólo la hipótesis de la existencia de la derivada segunda $f''(\xi)$ en ξ (1).

He aquí dos nuevas demostraciones elementales de este teorema que corresponden respectivamente a las hipótesis anteriores.

Supongamos que la derivada segunda $f''(x)$ exista en el punto ξ y sea además continua. Resulta de aquí, la existencia de la derivada primera en todo un entorno de ξ y la continuidad de la función $f(x)$.

Aplicando á la expresión

$$\frac{f(\xi + 2h) - 2f(\xi + h) + f(\xi)}{h^2}, \qquad (2)$$

que toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ para $h = 0$, el teorema L'Hôpital, lo cual es legítimo, resulta

$$\sigma(h) = \frac{2f'(\xi + 2h) - 2f'(\xi + h)}{2h},$$

(1) H. DINI, *Fondamenti;* HARNACH, *Elementi der Diff u Int. Rech.*, Leipzig.

y como $\sigma(h)$ se reduce a $\frac{0}{0}$ para $h=0$, una nueva aplicación del mismo nos conduce a

$$\sigma_1(h) = 2f''(\xi + 2h) - f''(\xi + h).$$

De aquí, resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 f(\xi)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \sigma_1(h) = f''(\xi),$$

es decir,

$$Lf(\xi) = f''(\xi),$$

puesto que

$$\lim_{h\to 0} f''(\xi + 2h) = \lim_{h\to 0} f''(\xi + h) = f''(\xi)$$

por ser $f''(x)$ *continua* en el punto ξ.

Supongamos ahora solamente la existencia de la $f''(x)$ en el punto ξ; y apliquemos la regla L' Hôpital a la expresión

$$\frac{\Delta^2 f(\xi)}{h^2} = \frac{f(\xi + 2h) - 2f(\xi + h) + f(\xi)}{h^2},$$

resulta

$$\sigma(h) = \frac{f'(\xi + 2h) - f'(\xi + h)}{h}.$$

Además, la expresión última puede escribirse en la forma siguiente

$$\sigma(h) = \frac{f'(\xi + 2h) - f'(\xi)}{h} - \frac{f'(\xi + h) - f'(\xi)}{h}$$

$$= 2 \cdot \frac{f'(\xi + 2h) - f'(\xi)}{2h} - \frac{f'(\xi + h) - f'(\xi)}{h}.$$

De aquí resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 f(\xi)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \sigma(h) = 2 \cdot f''(\xi) - f''(\xi),$$

es decir

$$Lf(\xi) = f''(\xi),$$

con lo cual queda demostrado el directo.

Para probar que la recíproca no se cumple, recordemos el siguiente ejemplo de Stolz.

La función

$$f(x) = a + bx + x^2\left(c + x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \qquad \text{para } x \neq 0$$

$$f(x) = a \qquad \text{para } x = 0$$

no tiene derivada segunda, y en cambio la expresión

$$\frac{\Delta^2 f(0)}{h^2} = \frac{2ch^2 + 8h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{2h} - 2h^3 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h^2}$$

tiene por límite c; es decir

$$\mathrm{L}f(0) = c.$$

Este teorema nos prueba además que la noción de leibniziana es más general que la de derivada segunda.

3. La derivada segunda se puede considerar también como el límite de una relación distinta a la anterior, la cual nos conduce a una definición no equivalente a la leibniziana, y que contiene como caso particular no solamente a la noción de derivada segunda sino también a esta última.

Sea $f(x)$ una función de x dada en (a, b). Se llama *schwarziana* de $f(x)$ en el punto $x = \xi$, el límite cuando existe de la expresión

$$\sigma(h) = \frac{f(\xi + h) - 2f(\xi) + f(\xi - h)}{h^2}$$

para $h \to 0$.

Si este límite existe, en todo punto x del intervalo (a, b), la schwarziana de $f(x)$ es una nueva función que se representa con la notación $\mathrm{S}f(x)$, es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} \doteq \mathrm{S}f(x).$$

Para la schwarziana de una función podemos demostrar un teorema análogo al I respecto a la leibniziana.

TEOREMA II. — *Si la función admite una derivada segunda finita en el punto ξ, existe también* la *schawarziana de $f(x)$* y *coincide con $f''(\xi)$. La recíproca no tiene lugar necesariamente* (1).

(1) E. Picard demuestra el teorema suponiendo además la *continuidad* de $f''(x)$ en el punto ξ. *Cours d'Analyse*, tomo I, París, 1924.

Demostraremos este teorema de un modo elemental siguiendo el método ya empleado.

Aplicando la regla L'Hôpital a la expresión

$$\sigma(h) = \frac{f(\xi + h) - 2f(\xi) + f(\xi - h)}{h^2}, \tag{1}$$

que toma la forma indeterminada para $h = 0$; lo cual es legítimo, resulta

$$\eta(h) = \frac{f'(\xi + h) - f'(\xi - h)}{2h}. \tag{2}$$

La expresión (2) se puede a su vez, escribir en la forma siguiente:

$$\eta(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{f'(\xi + h) - f'(\xi)}{h} + \frac{f'(\xi - h) - f'(\xi)}{-h}\right];$$

y teniendo presente que por hipótesis

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(\xi + h) - f'(\xi)}{h} = f_d''(\xi)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(\xi - h) - f'(\xi)}{-h} = f_i''(\xi)$$

y además,

$$f_i''(\xi) = f_d''(\xi) = f''(\xi),$$

resulta

$$\lim_{h \to 0} \eta(h) = \frac{1}{2}[f_d''(\xi) + f_i''(\xi)],$$

y por tanto,

$$\lim_{h \to 0} \sigma(h) = \lim_{h \to 0} \eta(h) = f''(\xi),$$

es decir,

$$Sf(\xi) = f''(\xi),$$

con lo cual queda demostrado el directo.

El siguiente ejemplo prueba la existencia de funciones con schwarziana y sin derivada segunda.

La función

$$f(x) = x \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x} \qquad \text{para } x \neq 0,$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = 0;$$

no tiene derivada segunda en el punto $\xi = 0$, puesto que la derivada primera en el mismo no existe, desde que la relación incremental

$$\frac{\Delta y}{h} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{h}$$

no tiende a un límite para $h \to 0$.

En cambio, formando la relación (1) correspondiente a esta función en $\xi = 0$, se encuentra

$$\sigma(h) = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{h} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{h}}{h},$$

cuyo valor es cero, para cualquier h, luego su límite es cero, para $h \to 0$.

Luego la schwarziana correspondiente a esta función existe, sin que exista la derivada segunda.

Si además de la existencia de la derivada segunda en el punto ξ, se admite la *continuidad* de la misma en dicho punto; la demostración de este teorema se puede obtener simplemente.

En efecto; aplicando la regla de L' Hôpital a la expresión

$$\sigma(h) = \frac{f(\xi + h) + f(\xi - h) - 2f(\xi)}{h^2}$$

resulta

$$\sigma_1(h) = \frac{f'(\xi + h - f'(\xi - h)}{2h}$$

la cual, a su vez, toma la forma indeterminada $\sigma_1(0) = \frac{0}{0}$ para $h = 0$. De aquí, con una nueva aplicación de la misma regla, se tiene:

$$\sigma_2(h) = \frac{f''(\xi + h) + f''(\xi - h)}{2}.$$

en consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} \sigma(h) = \frac{1}{2} \lim \left[f''(\xi + h) + f''(\xi - h)\right]$$

y como la derivada $f''(x)$ es continua en $x = \xi$, resulta finalmente

$$Sf(\xi) = \lim_{h \to 0} \sigma(h) = f''(\xi).$$

4. Hemos visto, en los números anteriores que tanto la noción de leibniziana como la de schwarziana de una función, contienen como caso particular la de derivada segunda. Sin embargo aquellas definiciones no son equivalentes puesto que hay ejemplos de funciones con schwarziana finita y cuya leibniziana no existe, así como también funciones en las cuales éstas son distintas.

Así la función

$$f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \qquad \text{para } x \neq 0$$

$$f(0) = 0 \qquad \text{para } x = 0$$

que carece de derivada segunda en el punto $x = 0$, tiene como schwarziana en el mismo, el valor cero; puesto que

$$Sf(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h} - h \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}}{h^2} = 0.$$

Veamos ahora si para la misma función, y en este punto, existe la leibniziana. Se tiene

$$Lf(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2h} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2h} \left(1 + 2 \cos \frac{1}{h}\right)}{h};$$

este límite no existe, puesto que oscila indifinidamente entre $-\infty$ y $+\infty$.

5. La importancia de la noción de schwarziana recide no solamente en el hecho que ella constituye una amplia generalización de la noción de derivada segunda, sino que — y esto es más importante — la *continuidad* de la función no es condición *necesaria* como exige la derivada ordinaria, para que la función admita schwarziana determinada. Un teorema que daré en seguida, resuelve esta cuestión fundamental.

Hemos visto, anteriormente, ejemplos de funciones continuas no derivables y sin embargo con schwarziana finita. Pero no se crea que la continuidad es condición *suficiente* para la existencia de esta última.

He aquí un ejemplo de función continua y cuya schwarziana no existe. La función

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \qquad \text{para } x \neq 0$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = 0.$$

La schwarziana en el punto $x = 0$, es el límite de

$$\sigma(h) = \frac{h^2 \cos \frac{1}{h} + h^2 \cos \frac{1}{-h}}{h^2} = 2 \cos \frac{1}{h} \qquad (h > 0)$$

para $h \to 0$. Esta expresión oscila indefinidamente entre $+2$ y -2, luego no tiene límite.

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo (a, b). Si ella no es continua en un punto ξ interior al mismo, se dice que ξ es un *punto de discontinuidad.* El punto ξ es un punto de discontinuidad de *primera especie* de $f(x)$, cuando esta función tiene un límite finito a la derecha: $f(\xi + 0)$ y otro a la izquierda: $f(\xi - 0)$. Si estos dos límites son iguales, el punto ξ sólo puede ser punto de discontinuidad, cuando este límite es diferente del valor de la función $f(x)$; en este caso bastará modificar el valor de la función en ξ para suprimir la discontinuidad.

Cuando los dos límites, $f(\xi + 0)$ y $f(\xi - 0)$ son diferentes, cualquiera que sea el valor de $f(\xi)$, el punto ξ es necesariamente un punto de discontinuidad.

Entre los puntos de discontinuidad de primera especie, son particularmente importantes los puntos regulares.

Un punto ξ se dice que es un *punto regular* de la función $f(x)$, si $f(\xi)$ es la *media aritmética* de los valores $f(\xi + 0)$ y $f(\xi - 0)$; esto es

$$f(\xi) = \frac{f(\xi + 0) + f(\xi - 0)}{2}.$$

En particular, todo punto de continuidad de $f(x)$ es regular.

Pasemos ahora a demostrar el teorema anunciado, el cual nos da la condición necesaria de la existencia de la schwarziana de una función.

TEOREMA III. — *Si la función $f(x)$ tiene una schwarziana finita en el punto ξ, este es un punto de discontinuidad de primera especie (regular) para la función.*

En efecto, se tiene por hipótesis

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi - h) - 2f(\xi) + f(\xi + h)}{h^2} = Sf(\xi).$$

donde $Sf(\xi)$ es un número finito. Esta expresión se puede escribir en forma equivalente

$$\frac{f(\xi - h) - 2f(\xi) + f(\xi + h)}{h^2} = Sf(\xi) + \varepsilon,$$

donde ε es una variable función de h que tiende a cero con h.

De aquí resulta

$$f(\xi + h) + f(\xi - h) - 2f(\xi) = h^2 [Sf(\xi) + \varepsilon]$$

y tomando límite de ambos miembros de este último, para $h \to 0$, resulta,

$$\lim_{h \to 0} [f(\xi + h) + f(\xi - h)] = 2f(\xi),$$

es decir,

$$\frac{f(\xi + 0) + f(\xi - 0)}{2} = f(\xi):$$

luego el punto ξ es un punto *regular* de la función.

En particular, si

$$f(\xi + 0) = f(\xi - 0)$$

la función $f(x)$ es continua en ξ.

La condición de existencia que enuncia el teorema. no es *suficiente.* Se tiene en efecto, el siguiente ejemplo.

La función

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} \qquad \text{para } x \neq 0$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = 0,$$

el origen es un punto regular, puesto que

$$f(0+0) = +1, \qquad f(0-0) = -1, \qquad f(0) = 0.$$

La schwarziana correspondiente a esta función en el punto $\xi = 0$, será el límite de

$$\sigma(h) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{|\operatorname{sen} h| + |\operatorname{sen} h|}{h}\right]$$

$$= \frac{2}{h^2}\frac{|\operatorname{sen}|}{h},$$

la cual tiende a $+\infty$ o $-\infty$, según que $h \to 0$ por valores positivos o negativos respectivamente.

6. Con la noción de *derivada simétrica* que pasamos a definir, se obtiene no solamente una definición más general de derivada segunda, equivalente a la schwarziana, sino que también se obtiene una extensión de la definición de derivada primera.

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo (a, b) finita y unívoca y x un punto interior.

Diremos que la función $f(x)$ admite una *derivada simétrica* en el punto x si existe el límite de la relación incremental (simétrico)

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \qquad (h > 0)$$

cuando $h \to 0$ de cualquier modo. Este número lo indicaremos con la notación $D_s f(x)$ o bien $f_s'(x)$.

La propiedad fundamental de esta definición es la siguiente:

Si la función $f(x)$ admite derivada en el punto ξ, existe también la derivada simétrica y su valor coincide con $f'(\xi)$; pero no recíprocamente.

En efecto, por ser la función $f(x)$ derivable en el punto ξ, existe la derivada a la derecha y a la izquierda de ξ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = f_d'(\xi) \tag{1}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} = f_i'(\xi) \tag{2}$$

y además se tiene

$$f_d'(\xi) = f_i'(\xi) = f'(\xi).$$

Por otra parte, la relación

$$\sigma(h) = \frac{f(\xi + h) - f(\xi - h)}{2h},$$

se puede escribir en la siguiente forma:

$$\sigma(h) = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{2h} - \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{2h}$$

o bien

$$\sigma(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} + \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h}\right]$$

Pasando al límite, para $h \to 0$, y teniendo presente las relaciones (1) y (2), resulta :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi - h)}{2h} = \frac{1}{2}[f_i'(\xi) + f_d'(\xi)] = f'(\xi),$$

es decir,

$$f_s'(\xi) = f'(\xi).$$

Para probar que la recíproca no se cumple, daremos el siguiente ejemplo.

La función, definida así :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \qquad \text{para } x \neq 0$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = 0,$$

que a pesar de ser continua en el origen, ella no es derivable, puesto que

$$f_d'(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_i'(0) = +1.$$

En cambio, la derivada simétrica existe, puesto que para $x = 0$, se tiene

$$\frac{f(0 + h) - f(0 - h)}{2h} = \frac{1}{2h}\left[\frac{h}{1 + e^{\frac{1}{h}}} - \frac{-h}{1 + e^{-\frac{1}{h}}}\right]$$

$$\sigma(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{h}}}\right],$$

y tomando límite, para $h \to 0$, resulta

$$\lim_{h \to 0} \sigma(h) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2},$$

es decir,

$$f_s'(0) = \frac{1}{2}.$$

La derivada simétrica es por lo tanto, más general que la derivada ordinaria (¹).

(¹) Un estudio completo de esta noción y de la *derivada generalizada*, puede el lector encontrarlo en una serie de trabajos publicados por el autor, citados en la bibliografía.

7. Consideremos ahora una función $f(x)$ que tenga derivada simétrica en todo punto x interior de (a, b); su derivada simétrica $f_s'(x)$ es una función de x definida en (a, b). Si esta nueva función admite a su vez una derivada simétrica en el punto ξ, se indicará con $f_s''(\xi$ o bien $D_s^{(2)}f(\xi)$ y la llamaremos *derivada segunda simétrica.*

La noción de derivada segunda simétrica contiene como caso particular la noción de derivada segunda, en virtud del siguiente teorema.

TEOREMA IV. — *Si la función $f(x)$ tiene una derivada segunda finita en el punto ξ, también existe la derivada segunda simétrica y son iguales; pero no recíprocamente.*

De la existencia de la derivada $f''(x)$ en el punto ξ, se deduce la de $f'(x)$, y además

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(\xi+h)-f'(\xi)}{h}=f_d''(\xi) \tag{1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(\xi-h)-f'(\xi)}{-h}=f_i''(\xi) \tag{2}$$

$$f''(\xi)=f_i''(\xi)=f_d''(\xi). \tag{3}$$

Se tiene por definición

$$f_s''(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f_s'(\xi+h)-f_s'(\xi-h)}{2h}. \tag{4}$$

Además, como

$$\sigma(h)=\frac{f_s'(\xi+h)-f_s'\xi-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f_s'(\xi+h)-f_s'(\xi)}{h}+\frac{f_s'(\xi-h)-f_s'(\xi)}{-h}\right]$$

y según el teorema anterior

$$f_s'(\xi)=f'(\xi) \qquad \text{y} \qquad f_s'(\xi\pm h)=f'(\xi\pm h)$$

puesto que $f'(\xi)$ y $f'(\xi\pm h)$ existen, se tiene

$$\sigma(h)=\frac{1}{2}\left[\frac{f'(\xi+h)-f'(\xi)}{h}+\frac{f'(\xi-h)-f'(\xi)}{-h}\right].$$

Tomando límite de $\sigma(h)$ para $h\to 0$ y teniendo presente las igualdades (1) y (2), resulta

$$\lim_{h\to 0}\sigma(h)=\frac{1}{2}[f_d''(\xi)+f_i''(\xi)]$$

y según (3), se tiene finalmente

$$f_s''(\xi) = f''(\xi),$$

con lo cual queda demostrado el directo.

Para probar que la recíproca no se cumple necesariamente, consideremos el siguiente ejemplo. La función definida así:

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{para } x \neq 0$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = 0,$$

es continua en $x = 0$ y no tiene derivada en este punto, para el cociente incremental,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

oscila entre $+1$ y -1, cuando $h \to 0$. Por tanto la función dada no tiene derivada segunda en dicho punto.

En cambio, la derivada simétrica existe, puesto que

$$f_s'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{sen} \frac{1}{h} + h \operatorname{sen} \frac{1}{-h}}{2h} = \lim \frac{0}{2h} = 0$$

por tanto, resulta

$$f_s''(0) = 0.$$

De aquí se deduce la existencia de la derivada segunda simétrica, sin que la derivada segunda ordinaria exista.

Si además de suponer que existe la $f''(x)$ en el punto ξ, admitimos también la continuidad de la misma, el teorema anterior se demuestra como sigue.

Se tiene, en efecto,

$$\sigma(h) = \frac{f_s'(\xi + h) - f_s'(\xi - h)}{2h}$$

$$= \frac{f'(\xi + h) - f'(\xi - h)}{2h},$$

según hemos visto. La expresión $\sigma(h)$ toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ para $h = 0$; luego aplicando la regla de L'Hôpital; se obtiene

$$\sigma_1(h) = \frac{f''(\xi + h) + f''(\xi - h)}{2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{h \to 0} \sigma(h) = \lim_{h \to 0} \sigma_1(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(\xi + h) + f''(\xi - h)}{2}$$

y como

$$\lim f''(\xi + h) = \lim f''(\xi - h) = f''(\xi),$$

por la continuidad de $f''(x)$ en ξ; se tiene finalmente

$$f_s''(\xi) = f''(\xi).$$

La equivalencia entre las dos difiniciones de derivada segunda simétrica y de schwarziana de una función la hemos establecido en una nota publicada en otro lugar ([1]).

Las consideraciones anteriores se pueden extender a las derivadas de orden sucesivo.

8. *Leibnizianas sucesivas.* — Dada una función $f(x)$ en el intervalo (a, b), hemos visto que la leibniziana $Lf(x)$ es una nueva función definida en (a, b). Esta función puede a su vez admitir una leibniziana. Si ésta existe, indicaremos con la notación $L^{(2)}f(x)$ o $f_L''(x)$ y llamaremos la *leibniziana segunda.* Del mismo modo la *leibniziana tercera* $L^{(3)}f(x)$ o $f_L'''(x)$ es la leibniziana de la lebniziana segunda. En general, llamaremos *leibniziana de orden* $n^{\text{ésimo}}$ la leibniziana de la de orden $(n - 1)$, e indicaremos con $L^{(n)}f(x)$ o $f_L^{(n)}(x)$.

Entre estas leibnizianas sucesivas y las derivadas sucesivas de orden par, existen relaciones interesantes que establecen los teoremas que paso a demostrar.

TEOREMA V. — *Si la función $f(x)$ tiene una derivada cuarta $f^{(IV)}(\xi)$ finita en el punto $x = \xi$, existe la leibniziana segunda $L^{(2)}f(x)$ en ξ y son iguales.*

De la existencia de la derivada $f^{(IV)}(x)$ en el punto ξ se desprende la de $f'''(x)$ en un interno de dicho punto y por tanto la de $f''(x)$.

Por definición, se tiene

$$f_L''(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f_L'(\xi + 2h) - 2f_L'(\xi + h) + f_L'(\xi)}{h^2}.$$

([1]) Ver J. C. VIGNAUX, *Relación entre la schwarziana y la derivada generalizada*, en *Revista matemática*, nº 24, año 1926.

pero como se tiene

$$f_L'(\xi) = f''(\xi), \qquad f_L'(\xi + 2h) = f'(\xi + 2h$$

$$f_L'(\xi + h) = f'(\xi + h),$$

el límite anterior coincide con el de la expresión

$$\frac{f''(\xi + 2h) - 2f''(\xi + h) + f''(\xi)}{h^2}.$$

Aplicando la regla L'Hôpital a la expresión anterior, resulta

$$\sigma(h) = \frac{f'''(\xi + 2h) - f'''(\xi + h)}{h}. \qquad (1)$$

expresión ésta que puede escribirse en la siguiente forma :

$$\sigma(h) = 2\frac{f'''(\xi + 2h) - f'''(\xi)}{2h} - \frac{f'''(\xi + h) - f'''(\xi)}{h}.$$

De aquí resulta, pasando al límite,

$$f_L''(\xi) = \lim_{h \to 0} \sigma(h) = 2f^{(IV)}(\xi) - f^{(IV)}(\xi) = f^{(IV)}(\xi).$$

Si además de la existencia de $f^{(IV)}(\xi)$, se admite también la *continuidad*, la demostración se obtiene en la forma siguiente.

Aplicando la regla L'Hôpital a la expresión (1), resulta

$$\sigma_1(h) = 2f^{(IV)}(\xi + 2h) - f^{(IV)}(\xi + h)$$

y como

$$\lim_{h \to 0} f^{(IV)}(\xi + 2h) = \lim_{h \to 0} f^{(IV)}(\xi + h) = f^{(IV)}(\xi)$$

se tiene

$$f_L''(\xi) = f^{(IV)}(\xi).$$

Un teorema análogo, se obtiene para la leibniziana tercera.

TEOREMA VI. — *Si la función $f(x)$ tiene una derivada resta $f^{(VI)}(x)$ en ξ, también existe la $f_L'''(\xi)$ en ξ y son iguales.*

En efecto, se tiene

$$f_L'''(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f_L''(\xi + 2h) - 2f_L''(\xi + h) + f_L''(\xi)}{h^2},$$

y según el teorema anterior

$$f_L''(\xi) = f^{(IV)}(\xi), \qquad f_L''(\xi + h) = f^{(IV)}(\xi + h),$$

$$f_L''(\xi + 2h) = f^{(IV)}(\xi + 2h),$$

y como la derivada $f^{(IV)}$ existe en ξ; resulta que $f'''(\xi)$ en el límite para $h \to 0$ de la expresión

$$\frac{f^{(IV)}(\xi + 2h) - 2f^{(IV)}(\xi + h) + f^{(IV)}(\xi)}{h^2}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, resulta

$$\sigma(h) = \frac{2f^{(V)}(\xi + 2h) - 2f^{(V)}(\xi + h)}{2h}$$

$$= 2 \cdot \frac{f^{(V)}(\xi + 2h) - f^{(V)}(\xi)}{2h} - \frac{f^{(V)}(\xi + h) - f^{(V)}(\xi)}{h}.$$

Pasando al límite, para $h \to 0$; se tiene

$$f_L''(\xi) = \lim_{h \to 0} \sigma(h) = f^{(VI)}(\xi).$$

En general, la propiedad subsiste para la leibniziana de orden $n$ésimo según él.

Teorema VII. — *Si la función $f(x)$ tiene una derivada $f^{(2n)}(x)$ de orden $2n$ en el punto $x = \xi$, existe la leibniziana de orden $n^{\text{ésima}}$ y son iguales.*

La demostración se obtiene, empleando el razonamiento por recurrencia.

Supongamos que el teorema sea cierto para la leibniziana de orden $(n - 1)$, es decir,

$$f_L^{(n-1)}(\xi) = f^{(2n-2)}(\xi). \qquad (1)$$

Se tiene, por definición

$$f_L^{(n)}(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f_L^{(n-1)}(\xi + 2h) - 2f_L^{(n-1)}(\xi + h) + f_L^{(n-1)}(\xi)}{h^2},$$

y según la igualdad (1); $f_L^{(n)}(\xi)$ es igual al límite para $h \to 0$ de la expresión

$$\sigma(h) = \frac{f^{(2n-2)}(\xi + 2h) - 2f^{(2n-2)}(\xi + h) + f^{(2n-2)}(\xi)}{h^2}.$$

aplicando a esta expresión la regla L'Hôpital nos conduce a

$$\sigma_1(h) = \frac{2f^{(2n-1)}(\xi + 2h) - 2f^{(2n-1)}(\xi + h)}{2h}$$

$$= 2\frac{f^{(2n-1)}(\xi + 2h) - f^{(2n-1)}(\xi)}{2h} - \frac{f^{(2n-1)}(\xi + h) - f^{(2n-1)}(\xi)}{h}.$$

Pasando al límite, resulta

$$f_L^{(n)}(\xi) = \lim_{h \to 0} \sigma_1(h) = f^{(2n)}(\xi).$$

Luego la propiedad es cierta, para cualquier entero positivo n.

9. Si consideramos el cálculo de la leibniziana de una función, como una cierta operación funcional, operación representada por el símbolo operatorio $Lf(x)$: resulta que la leibniziana $n^{\text{ésima}}$ es el resultado de la itiración de esta operacion n veces. Así la leibniziana segunda es el resultado de repetir dos veces la operación L, es decir :

$$L^{(2)}f(x) = L[Lf(x)] = L \, . \, Lf(x)$$

del mismo modo

$$L^{(3)}f(x) = L[L^{(2)}f(x)] = L \, . \, L^{(2)}f(x)$$

. . . .

$$L^{(n)}f(x) = L[L^{(n-1)}f(x)] = L \, . \, L^{(n-1)}f(x).$$

Teniendo presente que

$$L[L^{(2)}f(x)] = L^{(2)}[Lf(x)]$$

$$L[L^{(3)}f(x)] = L^{(3)}[Lf(x)]$$

y en general, para n entero y positivo

$$L[L^{(n)}f(x)] = L^{(n)}[Lf(x)],$$

resulta

$$L^{(\mu)}[L^{(\nu)}f(x)] = L^{(\mu+\nu)}f(x)$$

o simbólicamente

$$L^{(\mu)} \, . \, L^{(\nu)} = L^{(\mu+\nu)},$$

lo cual nos dice, que el símbolo L satisface a la llamada *ley de los índices.*

El símbolo $L^{(0)}$ tiene el siguiente significado:

$$L^{(0)} f(x) = f(x).$$

Para el cálculo de la leibniziana de una función que admite leibniziana de todos los ordenes, se tienen las siguientes reglas fácil de establecer

I.

$$L[c \,.\, f(x)] = c \,.\, Lf(x) \qquad c \neq 0$$

en general

$$L^{(n)}[c \,.\, f(x)] = c \,.\, L^{(n)} f(x),$$

lo cual se demuestra por inducción.

II.

$$L(f_1 + f_2 + ... + f_\nu) = Lf_1 + Lf_2 + ... + Lf_\nu$$

y

$$L^{(n)}(f_1 + f_2 + ... + f_\nu) = L^{(n)} f_1 + L^{(n)} f_2 + ... + L^{(n)} f_\nu.$$

III. Combinando las propiedades I y II, se obtiene

$$L^{(n)}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_\nu f_\nu = c_1 L^{(n)} f_1 + ... + e_\nu L^{(n)} f_\nu.$$

10. *Derivada tercera.* — Se obtiene para la derivada tercera, una definición sin pasar por las de orden primero y segundo, considerando el cociente de la diferencia tercera de la función $f(x)$, al cubo de la diferencia de la variable.

$$\frac{\Delta^3 f(x)}{h^3} = \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}. \qquad (1)$$

En efecto, se tiene el teorema siguiente.

TEOREMA VIII. — *Si la función $f(x)$ admite una derivada tercera finita en el punto ξ existe también el límite de la relación* (1) *para $h \to 0$ y coincide con aquéllo.*

De la existencia de la derivada tercera $f'''(x)$ en el punto ξ, se desprende la continuidad de $f''(x)$ y $f'(x)$ en un entorno de ξ. La regla de L'Hôpital aplicada a la (1) nos da

$$\sigma(h) = \frac{f'(\xi+3h) - 2f'(\xi+2h) + f'(\xi+h)}{h^2},$$

la cual nos da nuevamente

$$\sigma_1(h) = \frac{3f''(\xi+3h) - 4f''(\xi+2h) + f''(\xi+h)}{2h}.$$

Si sumamos y restamos a la vez $4f''(\xi)$ al segundo miembro de esta última expresión, se tiene

$$\sigma_1(h) = 3\frac{f''(\xi+3h) - f''(\xi)}{2h} + \frac{f''(\xi+h) - f''(\xi)}{2h} -$$

$$- 4\frac{f''(\xi+2h) - f''(\xi)}{2h}. \qquad (2)$$

Que también se puede escribir

$$\sigma_1(h) = \frac{9}{2}\frac{f''(\xi+3h) - f''(\xi)}{3h} + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi+h) - f''(\xi)}{h} -$$

$$- 4\frac{f''(\xi+2h) - f''(\xi)}{2h}.$$

Tomando límite, para $h \to 0$ resulta, finalmente,

$$\lim_{h\to 0} \sigma_1(h) = \frac{9}{2}f'''(\xi) + \frac{1}{2}f'''(\xi) - 4f'''(\xi),$$

es decir,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^3 f(\xi)}{h} = f'''(\xi).$$

Admitiendo además de la existencia de $f'''(x)$ en ξ, la *continuidad* de la misma en dicho punto, la demostración del teorema se concluiría así: Aplicando la regla a la expresión (2) se obtiene

$$\sigma_2(h) = \frac{9f'''(\xi+3h) - 8f'''(\xi+2h) + f'''(\xi+h)}{2},$$

luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^3 f(\xi)}{h^3} = \lim_{h\to 0} \sigma_2(h) = f'''(\xi).$$

En general, la derivada n-ésima de una función viene definida como límite de la relación

$$\frac{\Delta^{(n)} f(x)}{h^n}$$

de la diferencia n-ésima de la función por la potencia n-ésima de la diferencia de la variable, en virtud del siguiente teorema.

Si la función $f(x)$ tiene una derivada $n^{\text{ésima}}$ finita en el punto ξ, existe el límite de la relación (1) *y su valor coincide con aquélla.*

La demostración se obtiene, siguiendo el mismo método que para el caso $n=2$ y $n=3$, y empleando el principio de inducción.

Vivanti, en sus *Lezioni di Analisis Infinitesimale,* demuestra este teorema postulando además de la existencia de $f^{(n)}(x)$ en ξ, la *continuidad* de la misma en dicho punto.

Las nociones de schwarziana y de derivada simétricas sucesivas y sus propiedades, han sido introducidas y estudiadas en publicaciones anteriores del autor.

BIBLIOGRAFÍA

H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques,* París, 1906.
E. Pascal, *Esercizii critici di Calcolo, etc.*, Milano, 1921.
E. Picard, *Traité D'analyse,* París, 1922.
J. Rey Pastor, *Funciones de variable real,* Madrid, 1923.
J. C. Vignaux, *Sobre la schwarziana de una función,* en *Revista matemática,* 1926.
— *Sobre las schwarzianas sucesivas,* en *Revista matemática,* 1926.
— *Sobre una generalización de la noción de derivada,* en *Revista matemática,* 1926.
— *Sobre las derivadas generalizadas sucesivas,* en *Revista matemática,* 1926.
— *Relación entre la schwarziana y la derivada generalizada,* 1926.

LAS LATITUDES CRECIENTES CONSIDERADAS COMO LOGARITMOS

Y SUS PRINCIPALES APLICACIONES

ESPECIALMENTE A LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DEL TRIÁNGULO DE POSICIÓN

POR ÁNGEL PÉREZ

(Continuación)

---

20. Tratemos con más detalle el problema haciendo uso de nuestras tablas de logaritmos tangentes que ofrecen mayor exactitud que las de Barreda por que dan los arcos de 20 en 20 segundos.

21. 1° *Hallar el log seno de un arco.*

Para resolver este problema (directo), empezaremos por igualar el seno del arco a la tangente de otro arco que sea menor de 45°, puesto que el seno debe ser menor que la unidad (1) o a lo más igual a ella.

Pondremos pues,

$$\text{sen}\, l = \text{tg A} = \text{cotg}\left[45° + \frac{90° - 2\text{A}}{2}\right] = \frac{1}{\text{tg}\left[45° + \frac{90° - 2\text{A}}{2}\right]}, \qquad (1)$$

y si aplicamos las fórmulas

$$\frac{1 + \text{sen}\, l}{1 - \text{sen}\, l} = \frac{1 + \text{tg A}}{1 - \text{tg A}} = \frac{1 + \text{tg}\frac{2\text{A}}{2}}{1 - \text{tg}\frac{2\text{A}}{2}} = \text{tg}\left[45° + \frac{2\text{A}}{2}\right] \qquad (2)$$

$$\frac{1 + \text{sen}\, l}{1 - \text{sen}\, l} = \frac{1 + \cos(90° - l)}{1 - \cos(90° - l)} = \text{cotg}^2\left[45° - \frac{l}{2}\right] = \text{tg}^2\left[45° + \frac{l}{2}\right], \qquad (3)$$

tendremos, comparando (2) y (3)

$$\text{tg}\left[45° + \frac{2\text{A}}{2}\right] = \text{tg}^2\left[45° + \frac{l}{2}\right]. \qquad (4)$$

Tomemos ahora logaritmos en (1) y (4) y resultará

$$\log \operatorname{sen} l = -\operatorname{co}\lambda\,(2A) \qquad (a)$$

$$\lambda\,(2A) = 2\,[\lambda\,(l)]. \qquad (b)$$

Estas fórmulas resuelven la cuestión, y de ellas se deduce la siguiente regla : Tómese la λ del arco l conocido; duplíquese, búsquese la *colambda* correspondiente a $2\lambda\,(l)$ y esa colambda será el valor numérico del log sen l.

Observación. — Como el arco A es menor de 45°, su tangente es menor que 1; el arco 2A será menor que 90°, y, por tanto, su coλ resultará positiva, más a causa del signo que la precede en (a) será definitivamente negativa, y hará que el logaritmo seno, log sen l, sea negativo, como debe ser, ya que en general será sen l una fracción propia.

Ejemplos. — Hallar el log seno del arco $l = 32°20'40''$:

$$\lambda\,(l = 32°20'40'') = 0{,}25933 \qquad 2\lambda = 0{,}51866$$

$$\operatorname{co}\lambda\,(\text{de } 2\lambda) = -0{,}27163 = 9{,}72837 = \log \operatorname{sen}\,(32°20'40'').$$

Las tablas corrientes dan 9,72836.

Problema recíproco. — Hallar el arco que corresponde a un logaritmo seno dado.

Del problema directo se deduce, que debemos tomar al log sen dado como si fuese una *colambda;* se buscará la *lambda* que le corresponde y se dividirá por 2; el arco que a tal λ convenga, será el buscado.

Ejemplo. — Hallar el arco correspondiente a

$$\log \operatorname{sen} l = 9{,}72837 = -0{,}27163; \qquad \operatorname{co}\lambda\,(x) = -0{,}27163;$$

$$\lambda\,(x) = 0{,}51868$$

$$\frac{1}{2}\lambda\,(x) = -0{,}25933, \qquad \text{arc } x = 32°20'40''.$$

22. 2° *Hallar el logaritmo coseno de un arco dado.*

Empezaremos, como para el seno, igualando el arco dado, a otro A, menor que 45° y poniendo :

$$\cos l = \operatorname{tg} A = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{90° - 2A}{2}\right] = \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45° + \frac{90° - 2A}{2}\right]}. \qquad (1)$$

La relación $\frac{1+\cos l}{1-\cos l}$ podemos transformarla de estos dos modos :

$$\frac{1+\cos l}{1-\cos l}=\frac{1+\operatorname{tg} A}{1-\operatorname{tg} A}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{2A}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{2A}{2}}=\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{2A}{2}\right], \qquad (2)$$

$$\frac{1+\cos l}{1-\cos l}=\frac{2\cos^2\frac{l}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{l}{2}}=\operatorname{cotg}^2\frac{l}{2}=\operatorname{tg}^2\left[45^\circ+\frac{90^\circ-l}{2}\right]. \qquad (3)$$

De (2) y (3) sale :

$$\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{2A}{2}\right]=\operatorname{tg}^2\left[45^\circ+\frac{90^\circ-l}{2}\right]. \qquad (4)$$

Tomando logaritmos en (1) y (4) se obtiene :

$$\log\cos l=-\operatorname{co}\lambda(2A) \qquad (a)$$

$$\lambda(2A)=2\operatorname{co}\lambda(l). \qquad (b)$$

Estas dos fórmulas resuelven la cuestión.

Observación. — Por ser A menor de 45°, o a lo más igual, 2A será menor que 90° y su colambda positiva; pero a causa del signo que la precede será negativa, y así hará log cos l negativo, como debe ser, puesto que los cosenos son fracciones propias, y por tanto, sus logaritmos serán negativos.

De las fórmulas (*a*) y (*b*) deducimos la siguiente regla :

Para determinar el log cos l, en que l es conocido, tomaremos la *colambda* del arco y la duplicaremos, buscaremos la *lambda* que le corresponda y esa será el log coseno buscado.

Ejemplo: — Hallar el log cos (343°22′40″). Tómese el suplemento del arco dado a 360° que es 16°37′20″, y opérese según la regla

$$\operatorname{co}\lambda(16^\circ37'20'')=0{,}83540 \qquad 2\operatorname{co}\lambda=1{,}67080$$

$$\lambda(\text{de } 2\operatorname{co}\lambda)=-0{,}01854=9{,}98146=\log\cos l.$$

Las tablas trigonométricas dan el mismo valor.

Problema recíproco. — Hallar el arco que corresponde a un log coseno dado. Del problema directo se infiere que deberemos tomar el log cos dado como si fuera una *lambda ;* se buscará la *colambda* que le corres-

ponda, se dividirá por 2, y tomando el cociente como la *colambda* de un arco, se buscará este, que será el pedido.

Ejemplo. — Sea $\log \cos l = 9{,}98146 = -0{,}01854$

$$\lambda(x) = -0{,}01854, \qquad \text{co}\lambda\,[\text{de}\ \lambda(x)] = 1{,}67080$$

$$\frac{1}{2}\,\text{co}\lambda\ \text{de}\ \lambda(x) = 0{,}83540 \qquad x = 16°37'20'' \qquad \text{o} \qquad x = 343°22'40''.$$

En efecto, el $\log \cos (16°37'20'')$ es igual a 9,98146 por las tablas.

23. *Tercer problema. — Hallar el logaritmo tangente de un arco.* Igualaremos $\operatorname{tg} l$ a $\operatorname{cotg}(90° - l)$ y resultará :

$$\operatorname{tg} l = \operatorname{cotg}(90° - l) = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{90° - 2l}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45° + \dfrac{90° - 2l}{2}\right]}, \qquad (1)$$

y tomando logaritmos en esa identidad, será :

$$\log \operatorname{tg} l = -\,\text{co}\lambda\,(2l). \qquad (a)$$

Luego para hallar el logaritmo tangente de un arco dado, buscaremos la *colambda* del *duplo* del arco. Debemos distinguir dos casos :

1° Que el arco dado l sea menor que $45° = \frac{\pi}{4}$. En este caso el arco $2l$ sería menor que 90° y su coλ positiva, más a causa del signo que afecta el segundo miembro de (a), resultará negativo, y así hará el log tg l negativo, como debe ser, pues las tangentes de arcos menores de 45° son fracciones propias y así sus logaritmos serán negativos.

2° Si el arco está comprendido entre 45° y 90° la coλ $(2l)$ resultará negativa, pues $2l$ será mayor que 90° y a causa del signo que la precede en (a) será positiva, y hará la tg l de este último signo, como debe ser, pues tales tangentes son mayores que la unidad.

Ejemplos. — 1° *Hallar el log tg 377°50'30'' = log tg 17°50'30''* :

$$l = 17°50'30'', \qquad 2l = 35°41', \qquad \text{co}\lambda\, 2l = 0{,}49232$$

$$\log \operatorname{tg} l = -0{,}49232 = 9{,}50768.$$

El logaritmo tabular es igual 9,50767 o 8.

2° *Hallar el log tg [256°25′20″] = log tg 76°27′20″ :*

$$\text{co}\lambda\,(2l) = \text{co}\lambda\,(152°54'40'') = -\,\text{co}\lambda\,|180° - 152°54'40''| =$$
$$= -\,\text{co}\lambda\,(27°5'20''),$$

y según (*a*)

$$\text{co}\lambda\,(27°5'20'') = 0{,}61816$$

∴

$$\log \text{tg}\, 76°27'20'' = 0{,}61816.$$

El log tg 76°27′20″ calculado con tablas de cinco decimales da 0,61816, el mismo logaritmo.

Problema recíproco. — Si se trata de hallar el arco correspondiente a un log tg dado, debemos ver de antemano si el log tg dado es negativo o positivo. En el primer caso tomaremos para valor del arco que se busca, la mitad del que le corresponda considerado el logaritmo como una *colambda:* pero si el logaritmo es positivo, lo que nos indica que el arco buscada es mayor de 45°, tómese el suplemento del arco que corresponda a la *colambda* y divídase por 2.

1° Sea $\log \text{tg}\, x = 9{,}36909 = -\,0{,}63091$.

A coλ 0,63091 corresponde el arco $2x = 26°20'$. Luego :

$$x = (26°20') : 2 = 13°10'.$$

En efecto, el log tg 13°10′ es por las tablas corrientes 9,36909; el logaritmo de que partimos.

2° Sea buscar el arco x correspondiente a $\log \text{tg}\, x = +\,0{,}61816$. Siendo este logaritmo positivo, el arco x será mayor que 45°, luego $2x$ será mayor que 90°, y para hallar esa colambda habrá que buscar la colambda del suplemento, es decir, $\text{co}\lambda\,[180° - 2x]$; como $\text{co}\lambda\,(2x)$ sería negativa, $\text{co}\lambda\,[180° - 2x]$ será positiva [14 — 4ª].

Tendríamos

$$\text{co}\lambda\,[180° - 2x] = 0{,}61816$$

$$\text{arco correspondiente} = 180° - 2x = 27°5'20'';$$

$$2x = 180° - 27°5'20'' = 152°54'40''; \qquad x = 76°27'20''.$$

24. *Cuarto problema. — Hallar el log cotg de un arco.* Como en el problema precedente habrá que buscar la colambda del duplo del arco. Porque se tiene :

$$\text{cotg}\, l = \frac{1}{\text{tg}\, l}; \qquad \log \text{cotg}\, l = -\log \text{tg}\, l = \text{co}\lambda\,(2l).$$

Esta coλ $(2l)$ será positiva si el arco l es menor que 45°, y negativa si l es mayor que 45°.

Ejemplos. — 1° Hallar el log cotg de 35°27′20″. Busco la

$$\text{co}\lambda\,[2\,(35°27'20'')] = \text{co}\lambda\,[70°54'40''] = 0{,}14744.$$

Este mismo logaritmo encontramos en las tablas trigonométricas.

2° *Hallar el log cotg 255°12′20″.* Buscaremos el de 255°12′20″ — 180° = 75°12′20″.

Tomaremos la

$$\text{co}\lambda\,[2\,(75°12'20''] = \text{co}\lambda\,[150°24'40'']$$

$$= -\,\lambda\,[150°24'40'' - 90°] = -\,\lambda\,[60°24'20'']$$

$$-\,\lambda\,[60°24'20''] = -\,0{,}57813 = 9{,}42187,$$

El cálculo por las tablas ordinarias daría 9,42178. La diferencia logarítmica es 51 por 60″. El error es de 9 que produciría unos 10″5 de error en el arco.

Problema recíproco. — Hallar el arco correspondiente a un logaritmo cotangente dado. Distinguiremos dos casos :

1° Que el log cotg dado sea positivo; 2° Que sea negativo.

Si el log es *positivo* consideraremos ese logaritmo como *colambda* de un arco desconocido $2x$, buscaremos este arco en la tabla y lo dividiremos por 2, lo que nos dará el buscado. Si el logaritmo es *negativo*, la *colambda* corresponde al arco 180° — $2x$, que buscado, nos dará x, por un cálculo sencillo (como en la tangente).

Ejemplos. — 1° Hallar el arco que corresponde a log cotg x = 0,14744. Pongo coλ $(2x) = 0{,}14744$

$$2x = 70°54'40'' \qquad x = 35°27'20''.$$

2° Sea log cotg $x = 9{,}42187 = -\,0{,}57813$

$$\text{co}\lambda\,(180° - 2x) = -\,0{,}57813 \qquad 180° - 2x = 29°35'40''$$

$$2x = 180° - 29°35'40'' = 150°24'20 \qquad x = 75°12'10.$$

El arco es según el problema directo 75°12′20″.

25. *Quinto problema. — Hallar el logaritmo cosecante de un arco.* Sabemos que

$$\text{cosec}\,l = \frac{1}{\text{sen}\,l}; \qquad \log\text{cosec}\,l = -\log\text{sen}\,l.$$

Como log sen l es negativo, el log cosec l, que ha de ser de signo contrario, será positivo, y la cuestión queda reducida a buscar un log sen, el log sen l.

Ejemplos. — Hallar el log cosec (118°34′30″). Hállese el log cosec del suplemento del arco, es decir, log cosec 61°25′30″

$$\lambda(61°25'30'') = 0{,}59403 \qquad 2\lambda = 1{,}18806$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{de } 2\lambda) = 0{,}05641 = \log \text{cosec } 61°25'30''.$$

Problema recíproco. — Hallar el arco correspondiente a un log cosec dado. Sea el log cosec $x = 0{,}05641$

$$\text{co}\lambda\,(x) = 0{,}05641; \qquad \lambda\,(x) = 1{,}18809;$$

$$\frac{1}{2}\lambda\,(x) = 0{,}59404; \qquad x = 61°25'30''$$

que es efectivamente el arco que dan las tablas trigonométricas.

26. *Sexto problema. — Hallar el logaritmo secante de un arco dado.* Tenemos :

$$\sec l = \frac{1}{\cos l}; \qquad \log \sec l = -\log \cos l,$$

log cos l es negativo, luego log sec l es positivo.

La cuestión se reduce al cálculo de un logaritmo coseno.

Ejemplo. — Hallar el log sec 278°23′40″. Equivale al log sec de 360° — 278°23′40″ = 81°36′20″:

$$\log \sec 81°36'20''.$$

Busco log cos 81°36′20″ :

$$\text{co}\lambda\,(81°36'20'') = 0{,}06386; \qquad 2\,\text{co}\lambda = 0{,}13772;$$

$$\lambda\,[\text{corresp. a } 2\,\text{co}\lambda\,(l)] = 0{,}83566 = \log \sec 81°36'20''.$$

Las tablas dan 0,83569, siendo la diferencia tabular por 1′ = 86.

La diferencia 3 entre ambos logaritmos produce una variación de 3″ en el arco.

Problema recíproco. — Hallar el arco que corresponde a un logaritmo secante dado.

Ejemplo. — Sea el log sec = 0,00461 :

$$\lambda(x) = 0{,}00461; \qquad \text{co}\lambda\ [\text{corresp. a } \lambda(x) = 2{,}27500;$$

$$\frac{1}{2}\text{co}\lambda(x) = 1{,}13750 \qquad x = 8°20'4''.$$

Las tablas dan 8°20'.

27. *Séptimo problema. — Hallar el logaritmo verso de un arco.* Se llama *verso* de un arco, a la mitad del *seno verso.* Según esto,

$$1 - \cos l = 2\,\text{sen}^2\frac{l}{2}; \qquad \text{vers}\, l = \text{sen}^2\frac{l}{2}; \qquad \log \text{vers}\, l = 2 \log \text{sen}\frac{l}{2}.$$

Luego el problema directo se reduce a buscar el log seno de la mitad del arco que se considera y duplicar el logaritmo hallado.

Ejemplo. — Hallar el logaritmo verso de 166°44' :

$$\lambda\left[\frac{1}{2}l\right] = 83°22' = 1{,}23694; \qquad 2\lambda = 2{,}47388;$$

$$\text{co}\lambda\left[\text{corresp. a } 2\lambda\frac{l}{2}\right] = -0{,}00292 = \log\text{sen}\frac{l}{2}; \ \ 2\log\text{sen}\, l = 0{,}00584;$$

$$\log\text{vers}\, l = -0{,}00584 = 9{,}99416.$$

Mendoza, para log vers 166°44' da 9,99417.

Problema recíproco. — Hallar el arco correspondiente a un logaritmo verso dado. Del problema directo se desprende que para buscar el arco correspondiente a un logaritmo verso, se ha de tomar la mitad de dicho logaritmo y el cociente considerado como la *colambda* de un arco sirve de argumento de entrada en la tabla; se toma su correspondiente (lambda) y hallando su mitad, se buscará el arco que como *lambda* corresponda a ese cociente; el duplo del arco será el que se desea.

Ejemplo. — Hallar el arco que corresponde a logaritmo verso l = 1,50998 :

$$\text{co}\lambda = \frac{1}{2}\log\text{vers}\, l = -0{,}75499; \qquad \lambda\,(\text{de co}\lambda) = 0{,}15430;$$

$$\text{mitad} = 0{,}07715; \qquad \lambda\,(\text{de la mitad}),\ \text{arco de ella};$$

$$\lambda = \frac{1}{2}l = 10°7'30''; \qquad l = 20°15'00''.$$

Octavo problema directo. — Hallar el logaritmo subverso de un arco. El subverso de un arco es el verso del suplemento a 180°; y así :

$$\text{subvers}\, l = \text{vers}\,(180° - l) = \text{sen}^2 \left[90° - \frac{l}{2}\right] = \cos^2 \frac{1}{2}\, l.$$

Por consiguiente, para buscar el logaritmo del subverso se hallará el logaritmo coseno de la mitad del arco dado y se multiplicará este logaritmo por 2.

Lo mismo que el logaritmo verso, el del subverso será siempre negativo.

Ejemplo. — Hallar el logaritmo subverso de 159°46′ :

$$l = 159°46'; \qquad \frac{l}{2} = 79°53';$$

$$\text{co}\lambda \left(\frac{l}{2}\right) = 0{,}07708; \qquad 2\, \text{co}\lambda \left(\frac{1}{2}\, l\right) = 0{,}15416;$$

$$\lambda \left[2\, \text{co}\lambda \left(\frac{1}{2}\, l\right)\right] = \text{corresp.} = \log \cos \frac{l}{2} = -\, 0{,}75536;$$

$$2 \log \cos \frac{l}{2} = -\, 1{,}51072 = 8{,}48928$$

con poca diferencia, respecto al logaritmo subverso de las tablas.

Problema recíproco. — Hallar el arco correspondiente a un logaritmo subverso. Del problema directo se deduce que para buscar el arco que corresponda a un logaritmo subverso, se ha de dividir por 2 dicho logaritmo y el cociente tomado como la *lambda* de un arco, sirve para buscar la *correspondiente;* se divide por 2 ésta y tomado el cociente como una *colambda* se busca el arco que le corresponde el que duplicado nos dará el que se desea.

Ejemplo. — Hallar el arco que corresponde a logaritmo subverso l = — 1,48040 :

$$\lambda \left[\frac{1}{2} \log \text{subv}\, l\right] = -\, 0{,}74020; \qquad \text{corresp.} = 0{,}15976;$$

$$\text{mitad} = 0{,}07988; \qquad \text{co}\lambda\, (\text{mitad}); \qquad \text{arco corresp.} = \frac{1}{2}\, l = 79°31';$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\, l\right) = 159°2'.$$

Omitimos los problemas referentes al *coverso* y *subcoverso* por haber caído en desuso casi todas las *funciones versas*. Los ingleses conservan el *verso*, que llaman *haversine*, y en varias tablas de navegación se encuentran los logaritmos de $\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$, que son también los *versos* calculados por Mendoza, omitiendo todos con manifiesta ingratitud la paternidad del descubrimiento, cálculo y tabulación de esa función, única sobreviviente del general olvido de la obra inmensa y admirable del sapientísimo marino español don José de Mendoza y Ríos, matemático y astrónomo eminente, honor de la raza. Véase nuestra primera disquisición en estos *Anales*.

B. — APLICACIÓN DE LAS LATITUDES CRECIENTES AL CÁLCULO DE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (LÍNEAS NATURALES).

29. Hemos visto al fundar la teoría de la *loxodrómica* (y de la carta marina) que la latitud creciente venía dada mediante la integración de la ecuación diferencial por

$$l_c = l_a = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] \tag{1}$$

y que esa fórmula al pasar a los logaritmos vulgares y expresar los arcos en minutos se convertía en

$$l_c = l_a = \frac{1}{\operatorname{sen} 1' \log e} \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right] = 7915.87 \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]$$

$$= \mathrm{C} \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right], \tag{2}$$

siendo

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\operatorname{sen} 1' \log e}.$$

Si adoptamos la notación de Barreda, llamaremos :

$$\lambda(l) = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{l}{2}\right]; \tag{a}$$

$$\operatorname{co}\lambda(l) = \log \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{90^\circ - l}{2}\right]. \tag{b}$$

Y podremos escribir más cómodamente :

$$l_a = C\lambda\,(l) \qquad (c)$$

$$\mathrm{col}_a = C\mathrm{co}\lambda\,(l) \qquad (d)$$

que por la diferenciación darían :

$$dl_a = Cd\lambda\,(l) \qquad (e)$$

$$d\,\mathrm{col}_a = Cd\,\mathrm{co}\lambda\,(l). \qquad (f)$$

Diferenciemos ahora la expresion (1) de la latitud creciente, y para simplificar y facilitar la operación pongamos :

$$x = 45° + \frac{l}{2}; \qquad dx = d\left(\frac{l}{2}\right); \qquad l_a = l\,\mathrm{tg}\,x; \qquad dl_a = dl\,\mathrm{tg}\,x;$$

$$dl\,\mathrm{tg}\,(x) = \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x}; \qquad d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$dl\,\mathrm{tg}\,x = \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}\,x} = \frac{dx}{\cos^2 x\,\mathrm{tg}\,x} = \frac{dx}{\mathrm{sen}\,x\cos x} = \frac{2dx}{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}.$$

$$dl\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2dx}{\mathrm{sen}\,2x}.$$

Substituyendo en esta ecuación en vez de x y dx sus respectivos valores, se tiene :

$$dl\,\mathrm{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right] = \frac{2d\left(\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,2\left[45° + \frac{l}{2}\right]} = \frac{dl}{\mathrm{sen}\,(90° + l)} = \frac{dl}{\cos\,(-l)}$$

$$dl\,\mathrm{tg}\left[45° + \frac{l}{2}\right] = \frac{dl}{\cos l}$$

porque

$$\cos\,(-l) = \cos l.$$

Diferenciando también

$$\mathrm{col}_a = l\,\mathrm{tg}\left[45° + \frac{90° - l}{2}\right],$$

obtenemos transformando :

$$\mathrm{col}_a = l\,\mathrm{tg}\left[45° + 45° - \frac{l}{2}\right] = l\,\mathrm{tg}\left[90° - \frac{l}{2}\right] = l\,\mathrm{cotg}\,\frac{l}{2}.$$

Poniendo

$$\frac{l}{2}=x; \qquad d\left(\frac{l}{2}\right)=dx; \qquad \operatorname{cotg}\frac{l}{2}=\operatorname{cotg}x; \qquad l\operatorname{cotg}\frac{l}{2}=l\operatorname{cotg}x.$$

Habrá que diferenciar $l\operatorname{cotg}x$:

$$dl\operatorname{cotg}x=\frac{d\operatorname{cotg}x}{\operatorname{cotg}x}=-\frac{\dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{cotg}x}=-\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\operatorname{cotg}x}$$

$$=-\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x}=-\frac{2dx}{2\operatorname{sen}x\cos x}=-\frac{2dx}{\operatorname{sen}2x},$$

y substituyendo

$$dl\operatorname{cotg}\frac{l}{2}=d\operatorname{col}_a=-\frac{dl}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2l}{2}\right)}=-\frac{dl}{\operatorname{sen}l},$$

$$dl_a=\frac{dl}{\cos l}, \tag{g}$$

$$d\operatorname{col}_a=-\frac{\operatorname{sen}l}{dl}. \tag{h}$$

30. Introduciendo estos valores en (*e*) y (*f*) respectivamente, y despejando dl resulta :

$$dl=\mathrm{C}\cos l d\,.\,\lambda(l) \qquad dl=-\mathrm{C}\operatorname{sen}l d\,.\,\operatorname{co}\lambda(l)$$

1° Si $dl=1'$
- Variación de $\lambda(l)=\dfrac{1}{\mathrm{C}\cos l}=\dfrac{1}{\mathrm{C}}\sec l.$
- Variación de $\operatorname{co}\lambda(l)=-\dfrac{1}{\mathrm{C}\operatorname{sen}l}=-\dfrac{1}{\mathrm{C}}\operatorname{cosec}l.$

2° Si $d\lambda(l)=1$
- Variación de $l=\mathrm{C}\cos l-\dfrac{\operatorname{var}l}{\mathrm{C}}=\cos l.$
- Var. de $\operatorname{co}\lambda(l)=-\dfrac{dl}{\mathrm{C}\operatorname{sen}l}=-\dfrac{\mathrm{C}\cos l}{\mathrm{C}\operatorname{sen}l}=-\operatorname{cotg}l.$

3° Si $d\operatorname{co}\lambda(l)=1$
- Variación de $l=-\mathrm{C}\operatorname{sen}l.$
- Variación de $\lambda(l)=\dfrac{dl}{\mathrm{C}\cos l}=-\dfrac{\mathrm{C}\operatorname{sen}l}{\mathrm{C}\cos l}=-\operatorname{tg}l.$

De donde resulta, que, las diferencias sucesivas de las λ multiplicadas por el valor de la constante $C = 7915{,}87$, dan las *secantes* de los arcos de minuto en minuto (de arco).

Las diferencias sucesivas de las coλ multiplicadas por el mismo coeficiente C, dan las *cosecantes* de los arcos de minuto en minuto.

Por cada unidad de variación en las λ, la variación que sufre el arco, expresada en minutos, dividida por la constante C, da los valores de los cosenos de minuto en minuto.

Por cada variación de un minuto en los arcos, las variaciones que sufren las coλ divididas por las que experimentan las lambdas, dan las *cotangentes* de minuto en minuto.

Por cada variación de una unidad en la coλ, las variaciones que sufre el arco, expresadas en minutos, dividida por la constanqe C, dan los valores de los *senos,* de minuto en minuto.

Y por último, por cada variación de un minuto en los arcos, la alteración que sufre la *lambda* dividida por la que afecta a la colambda, da los valores de las *tangentes* de minuto en minuto.

31. Habiendo observado que con las tablas de logaritmos trigonométricos de cinco decimales, no se obtienen con exactitud las líneas naturales, emplearemos las nuestras con siete cifras de mantisa que las procuran con algo más de exactitud (tres decimales exactas).

Ejemplos. — Hallar la secante de 22°30′ :

$\lambda(22°30') = 0{,}1751074$
$\lambda(22°31') = 0{,}1752442$
$\Delta\lambda 1' = 0{,}0001368$

sec 22°30′ $= 0{,}0001368 \cdot 7915{,}87$
sec calcul. $= 1{,}08239...$ mayor que la tabular
sec nat. tab. $= 1{,}08236$
Diferencia $= 0{,}00053$

2° Hallar la cosecante de 22°30′ :

co$\lambda(22°30') = 0{,}7013382$
co$\lambda(22°31') = 0{,}7010082$
Δ co$\lambda(1') = 0{,}0003200$

cosec 22°30′ $= 0{,}00033 \cdot 7915{,}87$
cosec calcul. $= 2{,}61224$ menor que la tabular
cosec nat. tab. $= 2{,}61301$
Diferencia $= 0{,}00077$

3° *Hallar el coseno de 22°30′ :*

$\lambda(22°30') = 0{,}1751074$
$\lambda(22°31') = 0{,}1752442$
$\Delta\lambda(1') = 0{,}0001368$

$$\cos 22°30' = \frac{1}{0{,}0001368} \cdot \frac{1}{7915{,}87}$$

cos calcul. $= 0{,}9234$ menor que el cos tabular
cos nat. tab. $= 0{,}2939$
Diferencia $= 0{,}0005$

4° *Hallar la cotangente de 22°30′ :*

$\lambda(22°30') = 0{,}1751074$
$\lambda(22°31') = 0{,}1752442$
$\Delta\lambda(1'(= 0{,}0001368$

$co\lambda(22°30') = 0{,}7013382$
$co\lambda(22°31') = 0{,}7010082$
$\Delta\, c\lambda\,.\,1' = 0{,}0003300$

$$\text{cotg } 22°30' = \frac{\Delta\, c\lambda(1')}{\Delta\lambda(1')} = \frac{3300}{1368} = 2{,}41228$$ menor la calcul. que la cotg nat. tab.

cotg nat. $= 2{,}4142$
Difer. $= 0{,}0020$

5° *Hallar el seno de 22°30′ :*

$co\lambda\, 22°30' = 0{,}7013382$
$co\lambda\, 22°31' = 0{,}7010082$
$\Delta\, c\lambda(1') = 0{,}0003300$

$$\text{sen } 22°30' = \frac{1}{0{,}00033\,.\,791587}$$

sen calcul. $= 0{,}3828...$ mayor que el seno tabular
sen nat. tab. $= 0{,}3827...$

6° *Hallar la tangente de 22°30′ :*

$$\frac{\Delta\lambda\, 1'}{\Delta\, c\lambda\, 1'} = \frac{1368}{3300} = 0{,}414545 =$$ tg calculada, mayor que la tg natural tabulada.

tg nat. tab. $= 0{,}4142$
Diferencia $= 0{,}0003$

Ejemplo nuevo. — 7° *Hallar la secante de* 82°36′ :

$\lambda\,(82°36') = 1{,}1893166$
$\lambda\,(82°36') = 1{,}1902986$
$\Delta\lambda 1' \quad = 0{,}0009820$

$\text{sec } 82°36' \quad = 0{,}000982 \,.\, 7915{,}87$
$\text{sec calcul.} \quad = 7{,}7734$
$\text{sec nat. tab.} = 7{,}7639$
$\text{Diferencia} \quad = 0{,}0095$

8° *Hallar la cosecante de* 82°36′ :

$\text{co}\lambda\,(82°36') = 0{,}0562476$
$\text{co}\lambda\,(82°37') = 0{,}0561202$
$\Delta\,\text{co}\lambda\, 1' \quad = 0{,}0001274$

$\text{cosec } 82°36' \quad = 0{,}0001274 \,.\, 7915{,}87$
$\text{cosec calcul.} \quad = 1{,}00848$
$\text{cosec nat. tab.} = 1{,}00848$
$\text{Diferencia} \quad = 0{,}000$

9° *Hallar el coseno de* 82°36′ :

$\lambda\,(82°36') = 1{,}1893166$
$\lambda\,(82°37') = 1{,}1902986$
$\Delta\lambda 1' \quad = 0{,}0009820$

$$\cos 82°36' = \frac{1}{0{,}000982 \,.\, 7915{,}87}$$

$\text{cos calcul.} = 0{,}1286$ menor que el cos natural tabular
$\text{cos nat. tab.} = 0{,}1288$
$\text{Diferencia} \quad = 0{,}0002$

10° *Hallar la cotangente de* 82°36′ :

$$\text{cotg} = \frac{\Delta\,\text{co}\lambda\, 1'}{\Delta\lambda 1'} = \frac{1274}{9820} = 0{,}1297\ldots \quad \text{cotg nat. tab.} = 0{,}1299.$$

Diferencia 0,0002 cotg nat. > cotg calcul.

11° *Hallar el seno de* 82°36′ :

$$\text{co}\lambda\,(82°36') - \text{co}\lambda\,(82°37') = \Delta\,\text{co}\lambda\, 1' = 0{,}0001274$$

$$\text{sen } 82°36 = \frac{1}{0{,}0001274} \cdot \frac{1}{7915{,}87} = \frac{1}{1{,}00848} =$$

seno calculado = 0,9915. seno nat. = 0,9917.

Diferencia = 0,0002 seno calcul. mayor que seno nat. tab.

12° *Hallar la tangente de 82°36′ :*

$$\text{tg} = \frac{\Delta\lambda\,(1')}{\Delta\;\text{co}\lambda\,(1')} = \frac{9820}{1274} = 7{,}7088\ldots \text{ tg calculada; tg nat. tab.} = 7{,}6996.$$

Diferencia = 0,0092 tg calcul. > nat. tab.

Del examen de los ejemplos precedentes se deduce que : *a)* los *senos* y las *cosecantes* calculadas, casi coinciden con las mismas funciones dadas por las tablas; *b)* que los *cosenos* y las *secantes* se diferencian un poco más de las respectivas funciones naturales tabuladas; *c)* y que las *cotangentes* y *tangentes* tienen alguna mayor diferencia, siendo de más consideración en las *tangentes*. En general, para todas las funciones pueden obtenerse tres decimales exactas.

32. Hemos tratado de inquirir si el procedimiento podría convertirse en un método cómodo para el cálculo trigonométrico de las funciones naturales, y al propio tiempo de si podrían obtenerse con mayor aproximación decimal.

Como en las fórmulas deducidas intervienen las *diferenciales,* y al calcular las convertimos en *diferencias,* creemos que en esto hay un germen de error, que hemos tratado de reducir, disminuyendo la *unidad de arco*. Como nuestras tablas de *pseudolambdas* y *pseudocolambdas* (1), los dan de 20 en 20 segundos, hemos tomado por unidad este período igual al tercio del minuto, y con objeto de ofrecer ejemplos de diferentes tamaños de arcos, hemos calculado las funciones goniométricas de 3°48′. Para ello, era obvio que el radio en minutos, debería expresarse en tercios de minuto, y así ese factor de la constante total no será ya 3437,7 (radio en minutos), sino 3437,7 . 3 = 10313,1, cuyo valor multiplicado por $\frac{1}{\log e} = 2{,}302548$ da C = 23746,407.

He aquí el cálculo resumido de las funciones de ese arco.

(1) Ni nuestras primeras tablas, ni las de Barreda son en realidad de *lambdas* y *colambdas,* puesto que no se ha considerado la *constante;* sino en puridad de *logaritmos tangentes* y *cotangentes,* dispuestos de un nuevo modo. Pero eso no impide el que puedan ser utilizadas en toda especie de cálculos, sin menoscabo alguno para la exactitud; sobre todo después de la mejora que intentamos introducir en ellas, reduciendo la variación del arco a 10 o quizá a 5 segundos y calculando las partes proporcionales. Debiéramos pues llamarlas tablas de *pseudolambdas* y *pseudocolambdas*.

1° *Hallar la secante de 3°48′ :*

$\lambda\,(3°48') = 0{,}0288246$
$\lambda\,(3°48'20'') = 0{,}0288668$
$\Delta\lambda\,(20'') = 0{,}0000422$

sec 3°48′ = 0,0000422 . 23746,407
sec calcul. = 1,002098 sec calcul. menor que sec nat.
sec nat. tab. = 1,002204
Diferencia = 0,000106

2° *Hallar la cosecante de 3°48′ :*

$\mathrm{co}\lambda\, 3°48' = 1{,}4792098$
$\mathrm{co}\lambda\, 3°48'20'' = 1{,}4785749$
$\lambda\,\mathrm{co}\lambda\,(20) = 0{,}0006349$

cosec 3°48′ = 0,0006349
cosec calcul. = 15,0766 cosec calcul. menor que la nat.
cosec nat. = 15,0829
Diferencia = 0,0063

3° *Hallar el coseno de 3°48′ :*

$\Delta\lambda\,(20'') = 0{,}0000422$

$$\cos 3°48' = \frac{1}{0{,}0000422 \,.\, 23746{,}407}$$

cos calcul. = 0,9970 cos calcul. > cos nat. tab.
cos tab. = 0,9978
Diferencia = 0,0001

4° *Hallar la cotangente de 3°48′ :*

$$\mathrm{cotg}\, 3°48' = \frac{\Delta\,\mathrm{co}\lambda\; 20''}{\Delta\lambda\; 20''} = \frac{6349}{422} = 15{,}045 \text{ calcul.};$$

nat. = 15,056

cotg calcul. < cotg nat. tab.

Diferencia de ambas cotg = 0,011.

5° *Hallar el seno de 3°48′ :*

$\Delta\,\mathrm{co}\lambda\,(20'') = 0{,}0006349$

$$\mathrm{sen}\, 3°48' = \frac{1}{0{,}0006349 \,.\, 23746{,}407}$$

sen 3°48′ = 0,0663 = sen calcul.

sen nat. tab. = 0,0663 — iguales.

6° *Hallar la tangente de 3°48′ :*

$$\text{tg}\, 3°48' = \frac{\Delta\lambda\,(20'')}{\Delta\, c\lambda\,(20'')} = \frac{422}{6349} = 0{,}06646 \text{ tg nat. tab.} = 0{,}0664.$$

En estos ejemplos se advierte que todas las funciones coinciden con las naturales sensiblemente, con excepción de la cosecante y de la cotangente de las que no podemos contar más que con sus dos cifras enteras y con la primera decimal. Esta anomalía bastante curiosa debe consistir en la gran variación que experimentan ambas funciones tratándose de arcos pequeños: lo que nos advierte de que debemos tomar como unidad el segundo de arco y calcular las tablas de *mercatoriales* de segundo en segundo para los cinco primeros y últimos grados del cuadrante a semejanza de lo hecho para las tablas usuales.

Pero el cálculo de las *líneas naturales* podemos verificarlo más cómodamente por la anterior aplicación, pues habiendo visto que podemos calcular con gran exactitud los logaritmos de las funciones circulares, fácil será de tales logaritmos pasar a los números correspondientes o sea a las genuinas funciones goniométricas.

C. — APLICACIONES A LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

34. En un estudio que vió la luz pública en la *Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería*, de Buenos Aires, en 1921, se hizo aplicación de los *mercatoriales* a la resolución de los *seis casos* de los triángulos esféricos oblicuángulos.

El método fué contraloreado por los procedimientos de uso corriente, y se demostró que no era inferior a ellos. Por el contrario, en algunos casos los aventaja, pues permite obtener los resultados más brevemente. Más como toda obra humana, ésta tiene defectos; siendo uno de los principales el de exigir una diversidad de fórmulas. Con todo, éstas son fáciles de deducir y de referir a ciertos tipos que sirven para auxiliar la memoria.

El procedimiento se apoya en transformaciones de las fórmulas de Neper que dan las incógnitas en función de la tangente o cotangente, en tanto que los datos se combinan también con el auxilio de las mismas líneas. Como la tangente y cotangente son las funciones más

apropiadas para las determinaciones numéricas y el método mercatorial no emplea otras, dedúcese que debe proporcionar una gran exactitud a los resultados.

Aunque para la mejor comprensión de lo que va a seguir, sería conveniente hacer preceder esa aplicación a la trigonometría esférica, la extensión del presente trabajo nos impide tratar de ese asunto; más si fuera del agrado de los lectores podremos ofrecerles esa nueva *disquisición trigonométrica*, si la *Sociedad Científica Argentina* nos abre las columnas de sus reputados *Anales*.

V

Aplicación de los mercatoriales a la resolución de los problemas del triángulo de posición

35. El profesor Guyou de la Escuela naval francesa se ocupó principalmente de idear un procedimiento de resolución de los problemas náuticos que le condujeran a determinar la posición o *situación* de la nave en cualquier momento, mediante observaciones astronómicas en el mar. Las bases en que apoya su método, son el conocimiento del *horario*, del *azimut* y de la *altura* de los astros, especialmente del Sol; elementos que unidos a la teoría de los *círculos* y *rectas de altura* permiten trazar en la *carta marina* el *punto* de la nave.

Uno pues de los problemas fundamentales es la determinación simultánea del *horario* y del *azimut* mediante la observación con el *sextante* (en el mar) de la *altura* de un astro. Llegó así a la obtención de varias fórmulas (¹) cada una de las cuales es aplicable según los va-

(¹) d es la declinación, z es la distancia zenital.

coλ (α) y coλ (β) son las correspondientes de

$$\lambda(\alpha) = \lambda(l) - \lambda(d - z); \qquad \lambda(\beta) = \lambda(d + z) - \lambda(l).$$

1º Cuando $d + z < 90°$, las fórmulas que corresponden son :

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\text{co}\lambda\,(\alpha) + \text{co}\lambda\,(\beta)] \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\text{co}\lambda\,(\alpha) - \text{co}\lambda\,(\beta)].$$

2º Cuando $d + z > 90°$:

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\text{co}\lambda\,(\alpha) - \text{co}\lambda\,(\beta)] \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\text{co}\lambda\,(\alpha) + \text{co}\lambda\,(\beta)].$$

lores relativos de los datos que intervienen en la cuestión a resolver.

Barreda, profesor de la Escuela naval española, se aplicó a buscar los fundamentos matemáticos en que se apoyara Guyou, pues nos escribió diciéndonos que no los había encontrado en las *tablas de poche*. Estudió a seguida otros problemas y les dió solución, unas veces en mercatoriales puramente, y otras con ellos y las líneas de uso corriente.

Nosotros, a nuestra vez, hemos modificado procedimientos de uno y otro, y esas modificaciones serán el asunto principal de lo que vamos a exponer.

A. — TEÓRICA Y SOLUCIÓN DEL AUTOR DE ESTE TRABAJO PARA EL PROBLEMA DEL CÁLCULO SIMULTÁNEO DEL HORARIO Y DEL AZIMUT.

36. Recordando que los elementos verdaderos del triángulo de posición PAZ son : la *distancia polar* $\Delta = 90° \mp d$, la *colatitud* $c = 90° - l$ y la *distancia zenital* $z = 90° - a$ (en general), como lados; y Z *azimut*, A, *ángulo paraláctico* y P = H, *horario*, como ángulos respectivamente opuestos, la fórmula fundamental de la trigonometría esférica suministra las expresiones siguientes para z y Δ [1] :

3° Cuando $d - z > 90°$:

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\text{co}\lambda\,(\beta) - \text{co}\lambda\,(\alpha)] \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = -\frac{1}{2}[\text{co}\lambda\,(\beta) + \text{co}\lambda\,(\alpha)].$$

4° Cuando $d + z = 90°$:

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}\,\text{co}\lambda\,(\alpha).$$

5° Cuando $d - z = 90°$:

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = -\,\text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}\,\text{co}\lambda\,(\beta).$$

Tales son las fórmulas que inserta Barreda, que son sin duda las obtenidas por Guyou. En ellas H es el ángulo *horario* y Z el *azimut* contado desde el polo norte o sur del hemisferio del observador. He observado que $\lambda\,(\beta)$ es en algunos casos :

$$\lambda\,(\beta) = \lambda\,[180° - (d + z)] - \lambda\,(l).$$

[1] $$\cos z = \cos\Delta\cos c + \text{sen}\,\Delta\,\text{sen}\,c\cos\text{H} \qquad (1)$$

$$\cos\text{H} = \frac{\cos z - \cos\Delta\cos c}{\text{sen}\,\Delta\,\text{sen}\,c}; \qquad 1 - \cos\text{H} = 1 - \frac{\cos z - \cos\Delta\cos c}{\text{sen}\,\Delta\,\text{sen}\,c}; \qquad (2)$$

$$\cos z = \cos \Delta \cos c + \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c \cos H$$

$$\cos \Delta = \cos c \cos z + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} z \cos Z.$$

Si en cada una de éstas practicamos transformaciones conocidas

$$1 - \cos H = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} c + \cos \Delta \cos c - \cos z}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c} = \frac{\cos (\Delta - c) - \cos z}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{H}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} [\Delta - c + z] \operatorname{sen} \frac{1}{2} [z + c - \Delta]}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c},$$

y poniendo

$$\Delta + z + c = S,$$

se tiene :

$$\begin{array}{r} \Delta + c + z = S \\ 2c = 2c \\ \hline \Delta + z - c = S - 2c \end{array}$$

$$\frac{1}{2} [\Delta + z - c] = \frac{S}{2} - c.$$

Por analogía :

$$\frac{1}{2} [z + c - \Delta] = \frac{S}{2} - \Delta$$

$\therefore$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{S}{2} - c\right) \operatorname{sen} \left(\frac{S}{2} - \Delta\right)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c}. \qquad (a)$$

Añadiendo la unidad a ambos miembros de la (1), viene :

$$1 + \cos H = 2 \cos^2 \frac{H}{2} = \frac{\cos z + \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c - \cos \Delta \cos c}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c} = \frac{\cos z - \cos (\Delta + c)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c}$$

$$2 \cos^2 \frac{H}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} [z + \Delta + c] \operatorname{sen} \frac{1}{2} [\Delta + c - z]}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c}; \quad \cos^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{S}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{S}{2} - z\right)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} c}. \qquad (b)$$

Dividiendo (a) por (b) se tiene :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{S}{2} - c\right) \operatorname{sen} \left(\frac{S}{2} - \Delta\right)}{\operatorname{sen} \frac{S}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{S}{2} - z\right)},$$

y por analogía :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{S}{2} - c\right] \operatorname{sen} \left[\frac{S}{2} - z\right]}{\operatorname{sen} \frac{S}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{S}{2} - \Delta\right]},$$

que son las fórmulas (A) y (B).

para expresar $\frac{H}{2}$ y $\frac{Z}{2}$ en términos del seno, coseno y tangente del respectivo semi-ángulo se llega a las dos relaciones :

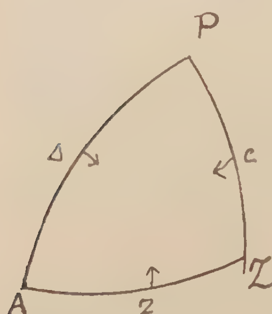


Figura 3

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - c\right) \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - \Delta\right)}{\operatorname{sen}\frac{S}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - z\right)} \qquad \text{(A)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - z\right) \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\frac{S}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - \Delta\right)} \qquad \text{(B)}$$

en que $S = \Delta + c + z$.

Combinando estas dos fórmulas por vía de producto y simplificando, se obtiene :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{S}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}^2\frac{S}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\left[\frac{\Delta + z}{2} - \frac{c}{2}\right]}{\operatorname{sen}^2\left[\frac{\Delta + z}{2} + \frac{c}{2}\right]}. \qquad \text{(C)}$$

Podríamos ahora continuar transformando el segundo miembro de ésta, y tratar luego de tomar mercatoriales, pero sería fácil que las expresiones a que así llegáramos, fueran erróneas en realidad, aun teniendo la apariencia de legítimas. Para evitar ese escollo procederemos de este otro modo :

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de la (C) se obtiene algebráicamente :

$$\operatorname{tg} \frac{H}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{Z}{2} = \pm \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\frac{S}{2}} = \pm \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\Delta + z}{2} - \frac{c}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\Delta + z}{2} + \frac{c}{2}\right]}. \qquad \text{(D)}$$

Desde luego estaríamos autorizados para tomar logaritmos ordinarios en ambos miembros, si consideramos el valor absoluto del segundo, porque la relación de sus senos tiene lugar entre senos de arcos positivos y menores que 180°, puesto que $\Delta + z + c < 360°$ (por una propiedad del triángulo esférico general) y por tanto $\frac{\Delta + z}{2} + \frac{c}{2}$,

y con mayor razón $\frac{\Delta + z}{2} - \frac{c}{2}$, son arcos menores de 180°. Más operando así, sin ulterior transformación del segundo miembro, no llegaríamos para ambos a su expresión mercatorial, ni por consiguiente a la consecución de la ventaja de cálculo que deseamos. Dividamos por lo pronto la ecuación (D) en las dos siguientes (E) y (E′).

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\frac{S}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\Delta + z}{2} - \frac{c}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\Delta + z}{2} + \frac{c}{2}\right]}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta + z}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta + z}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}} \tag{E}$$

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\frac{S}{2}} = -\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\Delta + z}{2} - \frac{c}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\Delta + z}{2} + \frac{c}{2}\right]}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta + z}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta + z}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}. \tag{E′}$$

37. Consideremos primeramente la (E) y empecemos por sentar hipótesis. Sea la primera $z > \Delta$, la cual puede tener lugar siendo z y Δ arcos agudos, o z obtuso y Δ agudo, o en fin z y Δ obtusos. Admitamos para mayor sencillez, que siendo $z > \Delta$ es $z = 90° - a$ y $\Delta = 90° - d$, es decir, que z y Δ son arcos agudos.

La (E) se transforma sucesivamente en :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta + z}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta + z}{2}\cos\frac{c}{2} + \frac{\cos(\Delta + z)}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}. \tag{F}$$

Esa última expresión podemos identificarla a

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

suponiendo que

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

y como

$$\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right] = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

resulta evidente que

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right]} = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right].$$

Pero la igualdad

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right]$$

supone implícitamente que

$$\frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

sea una fracción propia positiva, y esa suposición implícita debe demostrarse, lo que por otra parte es fácil.

En efecto, por una propiedad del triángulo esférico se tiene que

$$\Delta + z > c,$$

por tanto

$$\frac{\Delta + z}{2} > \frac{c}{2},$$

y como

$$\frac{\Delta + z}{2} < 90^\circ,$$

será

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta+z}{2} > \operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

o porque

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta+z}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2} = 1$$

es

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta+z}{2} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2}},$$

y por tanto,

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2}} > \operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

es decir,

$$1 > \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2},$$

lo que implica que

$$\frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}},$$

sea una fracción propia positiva, y en tal virtud está bien representada por

$$\operatorname{cotg}\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

en que $\frac{x}{2}$ es un arco menor de 45°.

La igualdad (F) comporta, por tanto, las dos ecuaciones :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \operatorname{cotg}\left|45^\circ + \frac{x}{2}\right| \qquad \text{(G)}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\Delta+z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad \text{(H)}$$

y tomando mercatoriales (12) y (14) :

$$-\operatorname{co}\lambda\,(H) - \operatorname{co}\lambda\,(Z) = -\lambda\,(x) \qquad \text{(G')}$$

o

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) + \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \lambda\,(x) \tag{1}$$

$$\text{co}\lambda\,(\Delta + z) - \text{co}\lambda\,(c) = -\,\text{co}\lambda\,(x) \tag{H'}$$

o

$$\text{co}\lambda\,(c) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z) = \text{co}\lambda\,(x). \tag{2}$$

Si quisieramos expresar $\text{co}\lambda\,(x)$ en función de los elementos de la observación, se tendría :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,[90^\circ - l] - \text{co}\lambda\,[90^\circ - d + 90^\circ - a] =$$

$$= \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,[180^\circ - (d + a)] \tag{2'}$$

$$= \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(d + a) \qquad [14\text{-}4^{a}].$$

38. Combinemos ahora las ecuaciones (A) y (B) de partida por vía de cociente y simplifiquemos; se obtendrá si $\text{tg}^2 \frac{\text{H}}{2}$ es el dividendo

$$\text{tg}^2 \frac{\text{H}}{2} : \text{tg}^2 \frac{\text{Z}}{2} = \frac{\text{sen}^2 \left|\frac{\text{S}}{2} - \Delta\right|}{\text{sen}^2 \left|\frac{\text{S}}{2} - z\right|}$$

o (I)

$$\text{tg} \frac{\text{H}}{2} : \text{tg} \frac{\text{Z}}{2} = \pm \frac{\text{sen} \left|\frac{\text{S}}{2} - \Delta\right|}{\text{sen} \left|\frac{\text{S}}{2} - z\right|},$$

y si fuera dividendo $\text{tg}^2 \frac{\text{Z}}{2}$, se tendría, evidentemente :

$$\text{tg}^2 \frac{\text{Z}}{2} : \text{tg}^2 \frac{\text{H}}{2} = \frac{\text{sen}^2 \left|\frac{\text{S}}{2} - z\right|}{\text{sen}^2 \left|\frac{\text{S}}{2} - \Delta\right|}$$

o (J)

$$\text{tg} \frac{\text{Z}}{2} : \text{tg} \frac{\text{H}}{2} = \pm \frac{\text{sen} \left|\frac{\text{S}}{2} - z\right|}{\text{sen} \left|\frac{\text{S}}{2} - \Delta\right|}.$$

La fórmula (I) se escinde en las dos expresiones :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} : \operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - \Delta\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - z\right]}, \qquad (K)$$

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} : \operatorname{tg}\frac{Z}{2} = -\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - \Delta\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - z\right]}, \qquad (K')$$

y la (J) en las dos :

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2} : \operatorname{tg}\frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - z\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - \Delta\right]}, \qquad (L)$$

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2} : \operatorname{tg}\frac{H}{2} = -\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - z\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - \Delta\right]}. \qquad (L')$$

Consideraremos por ahora las (K) y (L).

La (K) puede escribirse :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} : \operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - \Delta\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - z\right]} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{c}{2} + \frac{z - \Delta}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{c}{2} - \frac{z - \Delta}{2}\right]}.$$

Si referimos el triángulo al polo del hemisferio del observador, y en toda esta teoría lo supondremos así, los arcos del numerador y denominador son positivos y menores que 90°, por ser c siempre menor que 90°, y por tanto l es constantemente positiva, puesto que es complemento de c (colatitud), positiva siempre, y Δ y z son menores que un cuadrante y positivas, según la hipótesis asentada. En tal virtud podemos transformar y tomar logaritmos :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{c}{2} + \frac{z - \Delta}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{c}{2} - \frac{z - \Delta}{2}\right]} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{z-\Delta}{2} + \cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{z-\Delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{z-\Delta}{2} - \cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{z-\Delta}{2}}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}}{1-\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}}.$$

Por un procedimiento análogo a otro anterior (37) podría probarse que la fracción que sigue a $\operatorname{tg}\frac{Z}{2}$ es positiva y mayor que la unidad (1). En efecto, en todo triángulo esférico es un lado mayor que la diferencia de los otros dos, luego :

$$e > z-\Delta, \qquad \therefore \qquad \frac{c}{2} > \frac{z-\Delta}{2},$$

y como estas mitades son arcos agudos, como hemos probado, será :

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} > \operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} > \operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2},$$

$\therefore$

$$1 > \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2};$$

luego el denominador del quebrado referido es positivo y menor que la unidad, mientras que el numerador excede a ésta en cuanto valga

$$\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}.$$

Dicho quebrado podrá representarse por $\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{y}{2}\right]$ en que el arco $\frac{y}{2}$ debe ser menor que 45°.

Tenemos pues :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\,\frac{1+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}}{1-\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{y}{2}} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{y}{2}\right], \qquad \text{(M)}$$

cuya igualdad implica las dos ecuaciones :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2} \operatorname{tg}\left[45° + \frac{y}{2}\right], \tag{N}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{c}{2} \operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{y}{2}, \tag{O}$$

y en mercatoriales,

$$\lambda\,(y) = \operatorname{co}\lambda\,(Z) - \operatorname{co}\lambda\,(H) \tag{3}$$

$$\operatorname{co}\lambda\cdot(y) = \operatorname{co}\lambda\,(z-\Delta) - \operatorname{co}\lambda\,(c) \tag{4}$$

o en función de los elementos de la observación y de d, dada por las efemérides astronómicas,

$$\operatorname{co}\lambda\,(y) = \operatorname{co}\lambda\,[90° - a - 90° + d] - \operatorname{co}\lambda\,(90° - l) =$$

$$= \operatorname{co}\lambda\,(d-a) - \lambda\,(l) \tag{4'}$$

Parece pues, que de las formulas (1), (2), (3) y (4) puede deducirse la resolución del problema en el caso considerado; más antes de afirmarlo convendrá examinar si la (L) conduce a idénticas o distintas expresiones que la (K), única forma de cociente hasta ahora considerada.

39. Veamos pues, la (L) que escribiremos sucesivamente así :

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2} : \operatorname{tg}\frac{H}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - z\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - \Delta\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{c}{2} - \frac{z-\Delta}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{c}{2} + \frac{z-\Delta}{2}\right]} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{z-\Delta}{2} - \cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{z-\Delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{z-\Delta}{2} + \cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{z-\Delta}{2}} = \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}} \tag{P}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{y}{2}} = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right] = \frac{1}{\operatorname{tg}\left[45° + \frac{y}{2}\right]}.$$

Como anteriormente, podría probarse que $\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}$ es una

cantidad positiva menor que la unidad, y así el segundo miembro es una fracción positiva pura, que estará bien representada por la cotg $\left|45° + \frac{y}{2}\right|$ en que $\frac{y}{2}$ es un arco menor de 45°. Se tiene :

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right], \qquad (Q)$$

$$\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{y}{2}, \qquad (R)$$

y en mercatoriales,

$$-\operatorname{co}\lambda(Z) = -\operatorname{co}\lambda(H) - \lambda(y)$$

o $\qquad (5)$

$$\lambda(y) = -\operatorname{co}\lambda(H) + \operatorname{co}\lambda(Z)$$

$$\operatorname{co}\lambda(c) - \operatorname{co}\lambda(z - \Delta) = -\operatorname{co}\lambda(y)$$

o $\qquad (6)$

$$\operatorname{co}\lambda(y) = \operatorname{co}\lambda(z - \Delta) - \operatorname{co}\lambda(c)$$

$$\operatorname{co}\lambda(y) = \operatorname{co}\lambda[(90° - a) - (90° - d)] - \operatorname{co}\lambda(90° - l) =$$
$$= \operatorname{co}\lambda(d - a)\,\lambda(l). \qquad (6')$$

40. Comparando las expresiones (5) y (6) con las (2) y (4) las hallamos respectivamente idénticas, y como las (1) y (2) son comunes a ambos casos, la solución ofrecida por el producto y uno de los cocientes debe ser la misma que se obtenga del producto común y del otro cociente. Estamos, por tanto, autorizados para admitir la solución correspondiente al caso de $z > \Delta$, siendo z y Δ arcos agudos y positivos.

$$z > \Delta; \qquad 90° - a > 90° - d; \qquad a < d \qquad \text{o} \qquad d > a \qquad (I)$$

$$\operatorname{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \operatorname{co}\lambda(\Delta + z); \qquad (1)$$

$$\operatorname{co}\lambda(x) = \lambda(l) + \operatorname{co}\lambda(d + a); \qquad (1')$$

$$\operatorname{co}\lambda(y) = \operatorname{co}\lambda(z - \Delta) - \lambda(l); \qquad (2)$$

$$\operatorname{co}\lambda(y) = \operatorname{co}\lambda(d - a) - \lambda(l); \qquad (2')$$

$$\lambda(x) = \operatorname{co}\lambda(H) + \operatorname{co}\lambda(Z); \qquad (3)$$

$$\lambda(y) = -\operatorname{co}\lambda(H) + \operatorname{co}\lambda(Z); \qquad (4)$$

y de éstas (3) y (4) :

$$\text{co}\lambda\,(Z) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) + \lambda\,(y)]; \tag{5}$$

$$\text{co}\lambda\,(H) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)]. \tag{6}$$

41. Examinemos ahora el caso en que siendo $z > \Delta$, es $z = 90° + a$ y $\Delta = 90° - d$. Por lo común z es menor que 90°, puesto que el astro para ser observado debe estar sobre el horizonte del observador; pero esta circunstancia puede ocurrir teniendo el astro una pequeña altura aparente, la que una vez corregida se convierte en *depresión* o altura negativa; en tal caso el valor absoluto de la altura es de uuos pocos minutos, y por consiguiente, la distancia zenital z es poco mayor de 90°. Claro está que ocurriendo esto, la suma de z y Δ, $z + \Delta$ no llega a 180°. La fórmula del producto en tal circunstancia subsiste con los caracteres examinados en el caso anterior, y por tanto, no cambian tampoco sus expresiones mercatoriales. Este aserto es verdadero, suponiendo que se trate de los lados Δ y z del triángulo, más si se introdujeran sus complementos d y a se experimentaría un pequeño cambio que por otra parte puede preverse aplicando el principio cartesiano.

Tomemos las fórmulas directas que corresponden

$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(c) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z)$$

y substituyamos por

$$c = 90° - l, \qquad \Delta = 90° - d \qquad \text{y} \qquad z = 90° + a,$$

se tendrá :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(90° - l) - \text{co}\lambda\,(90° - d + 90° + a) =$$
$$= \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(180° - d + a).$$

Habiendo supuesto que $z + \Delta < 180°$ o sea $90° + a + 90° - d < 180°$, la existencia de esa desigualdad implica que $a - d < 0$ o $a < d$ en valor absoluto, o bien $d > a$. Siendo, pues, el término substractivo del paréntesis mayor que a, podemos escribir :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,[180° - (d - a)] = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(d - a) \qquad [14\text{-}4^a].$$

42. La fórmula del cociente subsiste también, y no cambian los mercatoriales que afectan a los lados del triángulo; pero sufren la misma alteración lo que se refieren al elemento a, altura.

En efecto, la fórmula del cociente en que $\operatorname{tg}\frac{Z}{2}$ era minuendo, en el caso anterior (40), no puede cambiar, porque $\operatorname{cotg}\frac{c}{2}$ sigue siendo la cotangente de un arco agudo; $\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}$ es así mismo la tangente de otro arco que es necesariamente menor que 90°, puesto que $z > \Delta$, y z excede en unos pocos minutos, que no llegan a un grado, a 90°; o en símbolos :

$$z - \Delta = (90° + a) - (90° - d) = a + d,$$

y por tanto,

$$\frac{z - \Delta}{2} = \frac{a + d}{2}.$$

Ahora bien, a es un arco muy pequeño por hipótesis y d no llega a 90°, luego $\frac{a + d}{2}$ no puede, con mayor razón, alcanzar el valor de un cuadrante. Luego el mercatorial

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(z - \Delta) - \text{co}\lambda\,(c),$$

conviene al caso que se está analizando. Pero en términos de los elementos de la observación, será :

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(90° + a - 90° + d) - \text{co}\lambda\,(90° - l) = \text{co}\lambda\,(a + d) - \lambda\,(l).$$

Si se comparan las fórmulas de $\text{co}\lambda\,(x)$ y $\text{co}\lambda\,(y)$ que acabamos de hallar con las respectivas del caso (I), se advertirá que todo es idéntico, a excepción del signo de a, que es opuesto. Y en efecto, así debe ocurrir, puesto que en el caso que estamos considerando, a no es positiva, sino negativa, luego según el principio cartesiano, debemos cambiar el signo de ese elemento al pasar de las fórmulas (I), a las últimas investigadas.

Luego los mercatoriales correspondientes al caso de ser :

$$z = 90° + a, \qquad \Delta = 90° - d, \qquad z + \Delta < 180°,$$

luego $d > a$ en valor absoluto serán :

$$\mathrm{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \mathrm{co}\lambda\,(\Delta + z) \qquad (1)$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(y) = \mathrm{co}\lambda\,(z - \Delta) - \lambda\,(l) \qquad (2)$$

$$\lambda\,(x) = \mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{H}) + \mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{Z}) \qquad (3)$$

$$\lambda\,(y) = -\,\mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{H}) + \mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{Z}) \qquad (4)$$

II

$$\mathrm{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \mathrm{co}\lambda\,(d - a) \qquad (1')$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(y) = \mathrm{co}\lambda\,(d + a) - \lambda\,(l) \qquad (2')$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{H}) = \frac{1}{2}\,[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)] \qquad (5)$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{Z}) = \frac{1}{2}\,[\lambda\,(x) + \lambda\,(y)] \qquad (6)$$

43. Sea ahora $z > \Delta$, siendo

$$z = 90° + a, \qquad \Delta = 90° + d, \qquad z + \Delta > 180°.$$

Caso que puede ocurrir en astronomía náutica de dos modos, de los que examinaremos ahora el primero; a saber : siendo a el pequeño arco negativo del supuesto anterior, como cuando aparece (o desaparece) el Sol (uno de sus limbos o el centro) en el horizonte aparente.

En tal circunstancia, para que sea $z > \Delta$, y que $z + \Delta$ exceda poco de $180°$, el astro debe estar en las cercañias del ecuador y en hemisferio opuesto al del observador.

Examinemos si en este caso sufrirán alguna modificación las fórmulas investigadas.

La fórmula del producto es :

$$\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{H}}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{Z}}{2} = \frac{1 - \mathrm{cotg}\,\frac{\Delta + z}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2}}{1 + \mathrm{cotg}\,\frac{\Delta + z}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2}}. \qquad (1)$$

¿Será legítimo escribir, como en el primer caso (40)

$$\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{Z}}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{H}}{2} = \mathrm{cotg}\left[45° + \frac{x}{2}\right] \qquad \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \mathrm{cotg}\,\frac{\Delta + z}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2} - ?$$

Para resolver la duda pongamos en vez de Δ y z sus respectivos valores

$$\Delta = 90° + d, \qquad z = 90° + a,$$

y analicemos

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\left[90° + d + 90° + a\right]\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\left[90° + d + 90° + a\right]\operatorname{tg}\frac{c}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{cotg}\left[90° + \frac{d+a}{2}\right]\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\left[90° + \frac{d+a}{2}\right]\operatorname{tg}\frac{c}{2}} \qquad (2)$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\left[-\frac{d+a}{2}\right]\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{tg}\left[-\frac{d+a}{2}\right]\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}.$$

Ahora bien, d y a son aquí arcos absolutos cuyo valor es pequeño según la hipótesis, pues d debe ser menor que a para que pueda cumplirse la condición $z > \Delta$ que equivale a $90° + a > 90° + d$, y por tanto, a $a > d$; y como a no llega a valor un grado, $\frac{1}{2}(d + a)$ será un arco pequeño y menor que a; luego el numerador de la fracción del último miembro de la (2), fórmula del producto, valdrá más que la unidad. pero no llegará a dos unidades, porqué $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(d + a)$ y $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ son tangentes de arcos menores que 45°, y así su producto será menor que la unidad. Este razonamiento prueba también que el denominador de la fracción es positivo y menor que la unidad, luego la fracción es positiva o impropia, valiendo más de 1.

Tal fracción no podemos, por tanto, identificarla con la cotangente $\left[45° + \frac{x}{2}\right]$, significando x un arco agudo. Pero es lícito igualarla a tangente $\left[45° + \frac{x}{2}\right]$ porque esta tangente vale más que la unidad (1).

Pudiéramos también haber llegado a esta conclusión por el examen directo de la (1).

En efecto, siendo $\Delta + z > 180°$, pero excediendo en poco a 180°,

por hipótesis, ya que a y d son arcos pequeños, su mitad $\frac{1}{2}(\Delta + z)$ valdrá poco más de 90°, luego $\cotg \frac{\Delta + z}{2}$ será negativa y como $\tg \frac{c}{2}$ es positiva (pues $c < 90°$), cambiará de signo el producto que sigue a 1 en el numerador de la fracción, resultando así el numerador positivo; esta conclusión implica que en el denominador el término aditivo, se convierta en substractivo, y así el denominador será una diferencia. Resta ver si ese residuo será positivo o negativo. Ya por la (2) sabemos que ha de ser positivo, pero partiendo de la (1) podemos probar ese aserto. La propiedad trigonométrica $\Delta + z > c$ da $\frac{\Delta + z}{2} > \frac{c}{2}$. Ahora bien, $\Delta + z > 180°$, pero $\Delta + z < 3 \,.\, 90°$ porque los arcos a y d en que exceden de 90° Δ y z son, por hipótesis, arcos muy pequeños, cuya suma no llega a valer $2a$, luego $\frac{1}{2}(\Delta + z)$ excederá en menos de a a 90°. Siendo, pues, $\frac{1}{2}(\Delta + z) > 90°$, y $\frac{c}{2}$ una cantidad que no alcanza a 45°; la cotg de $\frac{1}{2}(\Delta + z)$ será negativa por pertenecer al segundo cuadrante, mientras que la cotg de $\frac{c}{2}$ será positiva por corresponder al primero, luego es lícito escribir :

$$\cotg \frac{1}{2}(\Delta + z) < \cotg \frac{c}{2} \quad \text{o} \quad \cotg \frac{1}{2}(\Delta + z) < \frac{1}{\tg \frac{c}{2}},$$

y por consiguiente :

$$\cotg \frac{1}{2}(\Delta + z) \tg \frac{c}{2} < 1.$$

Siendo, pues,

$$1 > \cotg \frac{1}{2}(\Delta + z) \tg \frac{c}{2},$$

es claro que la diferencia que expresa en realidad el denominador es positiva como se había previsto.

44. Corresponde ahora analizar las fórmulas de los cocientes, porque habiendo cambiado la hipótesis respecto al caso I, quizá las resultancias de aquellas fórmulas no sean aplicables al caso que discu-

timos. Vimos en (38) que la fórmula (K) relativa al caso de ser $\operatorname{tg}\frac{H}{2}$ el dividendo era :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{H}{2}}{\operatorname{tg}\frac{Z}{2}} = \frac{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}}{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}}, \qquad (1)$$

la que igualamos entonces a la $\operatorname{tg}\left[45° + \frac{y}{2}\right]$. ¿Subsistirá la legitimidad de esta igualación?

Recordemos que $\frac{c}{2}$ es siempre un arco agudo menor que 45°, mientras que z y Δ en nuestra nueva hipótesis son arcos tales, que :

$$z = 90° + a, \qquad \Delta = 90° + d,$$

y que a y d son arcos pequeños. Substituyendo estos valores en la (1), tendremos :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{[(90° + a) - (90° + d)]}{2}}{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{[(90° + a) - (90° + d)]}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{Z}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a - d)}{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a - d)}. \qquad (2)$$

Como para que se realice la hipótesis $z > \Delta$ en que $z = 90° + a$, $\Delta = 90° + d$, debe ser $a > d$, las diferencias que afectan a las tangentes de los términos de la fracción son positivas, y sus tangentes que corresponden a arcos pequeños lo son también, luego el numerador de la fracción es una suma que excede a 1 en lo que valga

$$\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a - d).$$

El denominador es una diferencia cuyo signo debemos investigar. Para mayor facilidad consideraremos el denominador de la fracción del segundo miembro de la (1), que es equivalente al mismo término

de la fracción del último miembro de la (2), y aplicaremos un principio de trigonometría esférica que se formula

$$c > z - \Delta, \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{c}{2} > \frac{z - \Delta}{2}.$$

y como estas mitades son arcos agudos, como ya se ha probado, pues $\frac{c}{2}$ no alcanza a 45° y $\frac{z - \Delta}{2}$ es menor que $\frac{c}{2}$, será lícito poner :

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} > \operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2} \qquad \therefore \qquad \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} > \operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}$$

o

$$1 > \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}. \tag{3}$$

Esta relación (3) da también

$$1 > \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(90° + a - 90° - d),$$

o sea

$$1 > \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a - d),$$

que da la prueba directa de que el último denominador de la (2) es una diferencia positiva. La fracción considerada es, pues, impropia, y así es legítimo sentar que

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\left(45° + \frac{y}{2}\right). \tag{4}$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}. \tag{5}$$

45. Veamos el otro cociente dado por la (P) (39) :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{Z}{2}}{\operatorname{tg}\frac{H}{2}} = \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z - \Delta}{2}}. \tag{1}$$

Si se compara con el anterior cociente (44) (1), veremos que es el inverso del primero, luego si éste le hemos igualado a una tangente.

el segundo debemos identificarlo con la cotangente de un arco igual; será, por tanto :

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}}{1+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ-\frac{y}{2}\right], \qquad (2)$$

fórmula que podemos convertir en

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-d)}{1+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-d)}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ+\frac{y}{2}\right]. \qquad (3)$$

Ambas suponen que

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{z-\Delta}{2}=\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-d). \qquad (4)$$

Luego las fórmulas de que debemos tomar mercatoriales son :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{x}{2}\right];$$

$$\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-d)}{1+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-d)}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ+\frac{y}{2}\right];$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-d).$$

Empezaremos por las segundas :

$$\operatorname{co}\lambda(x)=\operatorname{co}\lambda(c)+\operatorname{co}\lambda(d+a)=\lambda(l)+\operatorname{co}\lambda[(\Delta+z)\,180^\circ]$$

$$\operatorname{co}\lambda(y)=\operatorname{co}\lambda(a-d)-\operatorname{co}\lambda(c)=\operatorname{co}\lambda(z-\Delta)-\lambda(l)$$

$$\lambda(x)=-\operatorname{co}\lambda(H)-\operatorname{co}\lambda(Z);\ \lambda(y)=\operatorname{co}\lambda(Z)-\operatorname{co}\lambda(H).$$

De modo que las fórmulas de este caso III en que $z > \Delta$

$$z = 90° + a. \qquad \Delta = 90° + d, \qquad z + \Delta \; 180°, \qquad a > d,$$

III

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,[(\Delta + z) - 180°]; \qquad \text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(d + a);$$

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(z + \Delta) - \lambda\,(l); \qquad \text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(a - d) - \lambda\,(l);$$

$$\lambda\,(x) = -\,\text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}); \qquad \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\text{Z}) - \text{co}\lambda\,(\text{H});$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = -\frac{1}{2}[\lambda\,(y) + \lambda\,(x)]; \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(y) - \lambda\,(x)].$$

46. Otro modo en que puede ser $z > \Delta$, ocurre tratándose del Sol, cuando se quiere hallar la dirección de los crepúsculos astronómicos o civiles en que al Sol se le considera con una altura negativa de 18° o de 6° respectivamente :

$$z > \Delta, \qquad z = 90° + a, \qquad \Delta = 90° \mp d, \qquad z + \Delta \gtrless 180°.$$

Es fácil ver que en este caso las fórmulas deben ser las mismas que en el anterior. En efecto, la fórmula del producto

$$\text{tg}\,\frac{\text{H}}{2}\,\text{tg}\,\frac{\text{Z}}{2} = \frac{1 - \text{cotg}\,\dfrac{\Delta + z}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2}}{1 + \text{cotg}\,\dfrac{\Delta + z}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2}}$$

se convierte por la introducción la hipótesis en ella en

$$\text{tg}\,\frac{\text{H}}{2}\,\text{tg}\,\frac{\text{Z}}{2} = \frac{1 + \text{tg}\,\dfrac{d + a}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2}}{1 - \text{tg}\,\dfrac{d + a}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2}},$$

en que $\frac{d + a}{2}$ es un arco agudo, puesto que ni d, declinación, ni a, altura, llegan a valer 90°: y que $\frac{c}{2}$ es menor de 45°, luego habrá que identificarla con la $\text{tg}\left[45° + \frac{x}{2}\right]$ en que $x < 90°$.

Producirá, por tanto, las mismas expresiones mercatoriales que en el caso anterior.

Estamos, pues, en el caso III.

47. Como los elementos del triángulo de posición pueden sufrir ciertas alteraciones sin que deje de existir el triángulo, se concibe que podrá ocurrir el caso de que sea Δ mayor que z, $\Delta > z$.

Este hecho puede acontecer de varios modos :

a) Siendo $\Delta = 90° - d$ y $z = 90° - a$; *b)* siendo $\Delta = 90° + d$ y $z = 90° - a$; *c)* y siendo $\Delta = 90° + d$ y $z = 90° + a$.

48. Examinemos el primero de esos casos

$$\Delta = 90° - d, \qquad z = 90° - a, \qquad \Delta > z.$$

La fórmula del producto no debe cambiar en esta circunstancia, puesto que

$$\Delta + z < 180°, \qquad \text{y por ello,} \qquad \frac{1}{2}(\Delta + z) < 90°.$$

En efecto :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{1 - \operatorname{cotg}\dfrac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\dfrac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}},$$

debe igualarse a $\operatorname{cotg}\left(45° + \frac{x}{2}\right)$, porque $\frac{\Delta + z}{2}$ es un arco menor de $90°$ y $\frac{c}{2}$ es también agudo, luego el numerador será una diferencia; el denominador es evidentemente una suma; resta probar que la diferencia del numerador es positiva; pero eso resulta de la relación trigonométrica; $\Delta + z > c$, que implica ser $\frac{\Delta + z}{2} > \frac{c}{2}$, y por tanto, será :

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta + z}{2} > \operatorname{tg}\frac{c}{2} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{\operatorname{cotg}\dfrac{\Delta + z}{2}} > \operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

$$\therefore \qquad 1 > \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

luego quedan evidenciadas las igualdades

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{x}{2}\right] \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\Delta + z}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}, \quad x < 90°,$$

cuyos mercatoriales serán :

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) + \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \lambda\,(x), \qquad \text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(c) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z),$$

idénticos con los que hallamos en el caso primero de $z > \Delta$.

Es de advertir además, que si en vez de Δ y z se ponen sus valores $z = 90° - a$, $\Delta = 90° - d$, vendrá :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(90° - d + 90° - a) =$$
$$= \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,[(180° - (a + d)] = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(a + d),$$

igual al valor hallado en ese caso primero. Más no acontece así para las fórmulas de los cocientes.

49. Tomemos el primero y transformémoslos como sigue :

$$\text{tg}\,\frac{\text{H}}{2} : \text{tg}\,\frac{\text{Z}}{2} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\text{S}}{2} - \Delta\right)}{\text{sen}\left(\frac{\text{S}}{2} - z\right)} = \frac{\text{sen}\left[\frac{c + z + \Delta}{2} - \Delta\right]}{\text{sen}\left[\frac{c + z + \Delta}{2} - z\right]} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left[\frac{c}{2} - \frac{\Delta - z}{2}\right]}{\text{sen}\left[\frac{c}{2} + \frac{\Delta - z}{2}\right]} = \frac{\text{sen}\,\frac{c}{2}\cos\frac{\Delta - z}{2} - \cos\frac{c}{2}\,\text{sen}\,\frac{\Delta - z}{2}}{\text{sen}\,\frac{c}{2}\cos\frac{\Delta - z}{2} + \cos\frac{c}{2}\,\text{sen}\,\frac{\Delta - z}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \text{cotg}\,\frac{c}{2}\,\text{tg}\,\frac{\Delta - z}{2}}{1 + \text{cotg}\,\frac{c}{2}\,\text{tg}\,\frac{\Delta - z}{2}} = \frac{1 - \text{tg}\,\frac{y}{2}}{1 + \text{tg}\,\frac{y}{2}} = \text{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right]$$

$$\text{tg}\,\frac{y}{2} = \text{cotg}\,\frac{c}{2}\,\text{tg}\,\frac{\Delta - z}{2}. \qquad (1)$$

Con un raciocinio igual al del fin del número (44), puede probarse que la fracción del segundo miembro de la (1) es de términos positivos en que el numerador es una diferencia y el denominador una suma, luego debemos igualarla a $\text{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right]$ en que $\frac{y}{2}$ está dada por

$$\text{tg}\,\frac{y}{2} = \text{cotg}\,\frac{c}{2}\,\text{tg}\,\frac{\Delta - z}{2}.$$

Tenemos, pues, las fórmulas

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{y}{2}\right] \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta - z}{2}. \tag{4}$$

De ellas salen las expresiones mercatoriales :

$$\lambda(y) = \operatorname{co\lambda}(H) - \operatorname{co\lambda}(Z), \tag{3'}$$

$$\operatorname{co\lambda}(y) = \operatorname{co\lambda}(\Delta - z) - \operatorname{co\lambda}(c), \tag{4'}$$

y en función de los complementos de los lados,

$$\operatorname{co\lambda}(y) = \operatorname{co\lambda}(a - d) - \lambda(l), \tag{4''}$$

pues de $90^\circ - d > 90^\circ - a$ sale $a > d$.

50. Veamos el otro cociente. Es evidente que debe ser :

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2} : \operatorname{tg}\frac{H}{2} = \frac{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta - z}{2}}{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta - z}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{y}{2}} - \operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{y}{2}\right], \tag{1}$$

estando definida $\frac{y}{2}$, por la relación

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta - z}{2}. \tag{2}$$

Y en mercatoriales :

$$\lambda(y) = \operatorname{co\lambda}(H) - \operatorname{co\lambda}(Z), \tag{1'}$$

$$\operatorname{co\lambda}(y) = \operatorname{co\lambda}(\Delta - z) - \operatorname{co\lambda}(c). \tag{2'}$$

Como se advierte, las expresiones mercatoriales de ambos cocientes son idénticas.

$$\operatorname{co\lambda}(y) = \operatorname{co\lambda}(a - d) - \lambda(l).$$

Luego para la resolución de este caso IV en que $\Delta > z$:

$$\Delta > z, \quad \Delta = 90° - d, \quad z = 90° - a, \quad \Delta + z < 180°, \quad a > d,$$

$$\text{IV} \left\{ \begin{array}{ll} \text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(c) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z); & \\ & \text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,[180° - (a + d)] \\ \text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(a + d); & \text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \text{co}\lambda\,(c) \\ \text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z - \lambda\,(l); & \text{co}\lambda\,(y) - \text{co}\lambda\,(a - d) - \lambda\,(l) \\ \lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) + \text{co}\lambda\,(\text{Z}); & \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}); \end{array} \right.$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) + \lambda\,(y)]; \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)].$$

51. Vengamos ahora al caso *b)* de 47 que $\Delta = 90° + d$, $z = 90° - a$, $\Delta > z$. Puede ocurrir que $\Delta + z < 180°$ o que $\Delta + z > 180°$. Sea :

$$\Delta > z, \qquad \Delta = 90° + z, \qquad z = 90° - a, \qquad \Delta + z < 180°.$$

Tomando la fórmula transformada del producto

$$\text{tg}\,\frac{\text{H}}{2}\,\text{tg}\,\frac{\text{Z}}{2} = \frac{1 - \text{cotg}\,\dfrac{\Delta - z}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2}}{1 + \text{cotg}\,\dfrac{\Delta + z}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{c}{2}},$$

e introduciendo en ella las hipótesis $\Delta + z < 180°$ que da $\dfrac{\Delta + z}{2} < 90°$, observamos que el numerador es una diferencia y el denominador una suma, que ambos términos son positivos por el razonamiento del número 48, por consiguiente, podremos igualarla a la $\text{cotg}\left[45° - \dfrac{x}{2}\right]$, y así obtendremos las mismas fórmulas trigonométricas y mercatoriales del caso anterior en el producto.

52. Tomando ahora cualquiera de las fórmulas del cociente, por ejemplo :

$$\text{tg}\,\frac{\text{Z}}{2} : \text{tg}\,\frac{\text{H}}{2} = \frac{\text{sen}\left[\dfrac{\text{S}}{2} - z\right]}{\text{sen}\left[\dfrac{\text{S}}{2} - \Delta\right]} = \frac{1 + \text{cotg}\,\dfrac{c}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{\Delta - z}{2}}{1 - \text{cotg}\,\dfrac{c}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{\Delta - z}{2}}.$$

y aplicando la hipótesis, observaremos que $\Delta - z = \frac{d+a}{2}$ valor menor que 90°, luego el numerador es positivo, y el denominador también lo es, pues que siendo $c > \Delta - z$, resulta, por un raciocinio empleado en el número 44,

$$1 > \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\Delta - z}{2}.$$

luego esa fracción, mayor que la unidad, puede igualarse a la tangente $\left[45° + \frac{y}{2}\right]$, siendo $y < 90°$.

Las relaciones serán, por tanto :

$$\operatorname{tg} \frac{Z}{2} = \operatorname{tg} \frac{H}{2} \operatorname{tg} \left[45° + \frac{y}{2}\right]. \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\Delta - z}{2}. \qquad (2)$$

Tendremos, pues, en mercatoriales para la resolución de este caso, en que :

$$\Delta = 90° + d, \qquad z = 90° - a, \qquad \Delta > z, \qquad \Delta + z < 180°.$$

$$\text{V} \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{co\lambda}(x) = \operatorname{co\lambda}(c) - \operatorname{co\lambda}(\Delta + z); \\ & \qquad \operatorname{co\lambda}(x) = \lambda(l) - \operatorname{co\lambda}[180° + (d - a)] = \lambda(l) + \operatorname{co\lambda}(d - a) \\ & \operatorname{co\lambda}(y) = \operatorname{co\lambda}(\Delta - z) - \operatorname{co\lambda}(c) = \\ & \qquad\qquad = \lambda(l) - \operatorname{co\lambda}(\Delta - z) = \lambda(l) - \operatorname{co\lambda}(d + a) \\ & \lambda(x) = \operatorname{co\lambda}(H) + \operatorname{co\lambda}(Z); \qquad \lambda(y) = \operatorname{co\lambda}(H) - \operatorname{co\lambda}(Z) \end{aligned} \right.$$

$$\operatorname{co\lambda}(H) = \frac{1}{2}[\lambda(x) + \lambda(y)]; \qquad \operatorname{co\lambda}(Z) = \frac{1}{2}[\lambda(x) - \lambda(y)].$$

Donde observamos que si se resuelve el problema en términos de Δ y z, se obtienen las mismas fórmulas del caso anterior, porque si se opera con d y a, hay que cambiar el signo de d en las (IV) para pasar a las [V], alterándose la expresión de $\operatorname{co\lambda}(x)$.

53. Consideremos ahora el caso *c)* del supuesto general $\Delta > z$, que es :

$$\Delta = 90° + d, \qquad z = 90° + a, \qquad d > a, \qquad \Delta + z = 180° + (d + a).$$

¿A qué debemos igualar la fórmula del producto en este caso? Tomemos la expresión

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\frac{1-\operatorname{cotg}\dfrac{\Delta+z}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}{1+\operatorname{cotg}\dfrac{\Delta+z}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}, \qquad (1)$$

y aplicándole la hipótesis y razonando como en el número 43, veremos que aquélla equivale a

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\frac{1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{d+a}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{d+a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}, \qquad (1')$$

y como ni d ni a llegan a 90°, su semisuma no alcanzará tampoco a valer un cuadrante, luego el numerador es mayor que la unidad y positivo: restaría probar que el denominador es una diferencia positiva también. Y en efecto, como

$$\Delta=90°+d \qquad \text{y} \qquad z=90°+a;$$

$$\Delta+z=180°+d+a, \qquad \frac{\Delta+z}{2}=90°+\frac{d+a}{2};$$

y como sabemos que $\Delta+z>c$, será

$$\frac{\Delta+z}{2}>\frac{c}{2}; \qquad \text{es decir,} \qquad 90°+\frac{d+a}{2}.$$

Como $90°+\frac{d+a}{2}$ es un arco obtuso que termina en el segundo cuadrante $\left(\text{pues } \frac{d+a}{2}<90°\right)$, su cotangente será negativa, mientras que la $\operatorname{cotg}\frac{c}{2}$ es positiva, y así es lícito escribir:

$$\operatorname{cotg}\left|90°+\frac{d+a}{2}\right|<\operatorname{cotg}\frac{c}{2},$$

o bien

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{d+a}{2}\right)<\operatorname{cotg}\frac{c}{2}, \qquad -\operatorname{tg}\left(\frac{d+a}{2}\right)<\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}},$$

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{d+a}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{c}{2}<1.$$

Luego el término substractivo $\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ es menor que 1, y por tanto, el denominador es positivo haciendo la fracción impropia o mayor que la unidad, y así representable por $\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{x}{2}\right]$ en que $\frac{x}{2}<45^\circ$. Así que :

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{x}{2}\right], \qquad (2)$$

definiéndose $\frac{x}{2}$ por la ecuación

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{d+a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \qquad (3)$$

54. Cuanto a la expresión de los cocientes, quedan invariables, pues $\frac{\Delta-z}{2}$ es menor que 90°, ya que se reduce a $\frac{d-a}{2}$. Luego :

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta-z}{2}}{1-\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta-z}{2}}=\operatorname{tg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\left[45^\circ+\frac{y}{2}\right], \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta-z}{2}. \qquad (5)$$

Estamos así capacitados para tomar mercatoriales de (2), (3), (4) y (5), resultando respectivamente :

$$\lambda(x)=-\operatorname{co\lambda}(H)-\operatorname{co\lambda}(Z), \qquad \operatorname{co\lambda}(x)=\operatorname{co\lambda}(c)+\operatorname{co\lambda}(d+a),$$

$$\lambda(y)=\operatorname{co\lambda}(H)-\operatorname{co\lambda}(Z), \qquad \operatorname{co\lambda}(y)=\operatorname{co\lambda}(\Delta-z)-\operatorname{co\lambda}(c).$$

Ahora bien :

$$d+a=\Delta+z-180^\circ,$$

luego

$$\operatorname{co\lambda}(x)=\lambda(l)+\operatorname{co\lambda}\left[\Delta+z-180^\circ\right],$$

y tomemos para la resolución del caso *c)*

$$\Delta > z, \quad \Delta = 90° + d, \quad z = 90° + a, \quad \Delta + z > 180°, \quad d > a.$$

$$\mathrm{VI}\left\{\begin{aligned} &\mathrm{co}\lambda(x) = \mathrm{co}\lambda(c) + \mathrm{co}\lambda[\Delta + z - 180°] = \\ &\qquad = \lambda(l) + \mathrm{co}\lambda(\Delta + z - 180°) = \lambda(l) + \mathrm{co}\lambda(d + a) \\ &\mathrm{co}\lambda(y) = \mathrm{co}\lambda(\Delta - z) - \mathrm{co}\lambda(c) = \\ &\qquad = \mathrm{co}\lambda(\Delta - z) - \lambda(l) = \mathrm{co}\lambda(d - a) - \lambda(l) \\ &\lambda(x) = -\mathrm{co}\lambda(\mathrm{H}) - \mathrm{co}\lambda(\mathrm{Z}); \qquad \lambda(y) = \mathrm{co}\lambda(\mathrm{H}) - \mathrm{co}\lambda(\mathrm{Z}) \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{co}\lambda(\mathrm{H}) = \frac{1}{2}[\lambda(y) - \lambda(x)]; \qquad \mathrm{co}\lambda(\mathrm{Z}) = -\frac{1}{2}[\lambda(y) + \lambda(x)].$$

55. *Casos particulares.* — Examinaremos dos, los que ocurren muy raramente : 1° el que sea $\Delta = z$, 2° el que sea $\Delta + z = 180°$.

El ser $\Delta = z$ puede tener lugar siendo Δ y z arcos menores que un cuadrante, o mayores que 90°.

Desde luego la trigonometría nos previene que en cualquiera de estas dos circunstancias, el triángulo esférico será isóceles y en tal virtud serán iguales los ángulos opuestos a esos lados iguales, es decir, que $\mathrm{Z} = \mathrm{H}$. Pues a este mismo resultado nos conducen las fórmulas mercatoriales. Tomemos las del caso (I) :

1°

$$\mathrm{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \mathrm{co}\lambda(\Delta + z)$$

será

$$\mathrm{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \mathrm{co}\lambda(2z = 2\Delta),$$

$$\mathrm{co}\lambda(y) = \mathrm{co}\lambda(z - \Delta) - \lambda(l)$$

será

$$\mathrm{co}\lambda(y) = \mathrm{co}\lambda(0) - \lambda(l) = \infty - \lambda(l) = \infty.$$

Por tanto será $\lambda(y) = 0$.

$$\lambda(y) = 0 = -\mathrm{co}\lambda(\mathrm{H}) + \mathrm{co}\lambda(\mathrm{Z}),$$

o bien :

$$\mathrm{co}\lambda(\mathrm{H}) = \mathrm{co}\lambda(\mathrm{Z}),$$

que implica ser $\mathrm{H} = \mathrm{Z}$.

$$\mathrm{co}\lambda(\mathrm{H}) - \frac{1}{2}[\lambda(x)], \qquad \mathrm{co}\lambda(\mathrm{Z}) = \frac{1}{2}\lambda(x),$$

$$\lambda(x) = \text{correspondiente}\,[\lambda(l) - \mathrm{co}\lambda(2z)].$$

En este caso, vienen para H y Z valores agudos.

2° Si es $\Delta = z > 90°$, las fórmulas (III) nos dan; por la hipótesis :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(2\Delta - 180°),$$

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(0) - \lambda\,(l) = \infty - \lambda\,(l) = 0,$$

$$\lambda\,(y) = 0 = \text{co}\lambda\,(Z) - \text{co}\lambda\,(H)$$

o

$$\text{co}\lambda\,(Z) = \text{co}\lambda\,(H) \qquad \therefore \qquad Z = H.$$

Pero

$$\lambda\,(x) = -\,\text{co}\lambda\,(H) - \text{co}\lambda\,(Z) = -\,2\,\text{co}\lambda\,(H) = -\,2\,\text{co}\lambda\,(Z).$$

Por otra parte

$$\text{co}\lambda\,(H) = -\frac{1}{2}\lambda\,(x), \qquad \text{co}\lambda\,(Z) = -\frac{1}{2}\lambda\,(x).$$

Esas colambdas negativas corresponden a arcos mayores que 90°, luego $Z = H > 90°$.

3° Sea ahora $\Delta + z = 180°$. La trigonometría nos previene de que

$$Z + H = 180° \qquad \therefore \qquad Z = 180° - H, \qquad H = 180° - Z.$$

Tomemos el grupo (III), por ejemplo :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,|180°| = \lambda\,(l) - \infty = -\,\infty,$$

$$\lambda\,(x) = -\,\text{co}\lambda\,(H) - \text{co}\lambda\,(Z) = 0,$$

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(z - \Delta) - \lambda\,(l) = k \text{ (cierto valor)},$$

$$-\,\text{co}\lambda\,(H) = \text{co}\lambda\,(Z) \qquad \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(Z) - \text{co}\lambda\,(H) = p \text{ (cierto valor)},$$

$$\text{co}\lambda\,(H) = -\frac{1}{2}\lambda\,(y), \qquad \text{co}\lambda\,(Z) = \frac{1}{2}\lambda\,(y), \qquad H > Z,$$

pues hemos salido de (III) en que $Z > \Delta$, H es, pues, mayor que 90°, $Z < 90°$.

4° Si la hipótesis se hubiera introducido en (VI), había resultado $Z > H$, Z obtuso o $> 90°$, H agudo o $< 90°$.

56. Las numerosas fórmulas que demanda el cálculo por mercatoriales, podemos reducirlas a dos tipos, $z > \Delta$ y $\Delta > z$. Este último

ocurre con más frecuencia que el primero en los problemas de la navegación astronómica. Se disminuye el número de fórmulas resolviendo el triángulo en función de Δ, z y l.

He aquí un resumen o cuadro de las fórmulas que consideramos más convenientes :

1° $z > \Delta$, $\quad z = 90° - a$, $\quad \Delta = 90° - d$,

$\Delta + z < 180°$, $\quad d > a$ (valor absoluto).

I

$$\text{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \text{co}\lambda(\Delta + z); \qquad \text{co}\lambda(y) = \text{co}\lambda(z - \Delta) - \lambda(l);$$

$$\lambda(x) = \text{co}\lambda(\text{H}) + \text{co}\lambda(\text{Z}); \qquad \lambda(y) = -\,\text{co}\lambda(\text{H}) + \text{co}\lambda(\text{Z});$$

$$\text{co}\lambda(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda(x) - \lambda(y)]; \qquad \text{co}\lambda(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda(x) + \lambda(y)].$$

2° $z > \Delta$, $\quad z = 90° + a$, $\quad \Delta = 90° - d$,

$\Delta + z < 180°$, $\quad d > a$ (valor absoluto).

II

$$\text{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \text{co}\lambda(\Delta + z); \qquad \text{co}\lambda(y) = \text{co}\lambda(z - \Delta) - \lambda(l)$$

$$\lambda(x) = \text{co}\lambda(\text{H}) + \text{co}\lambda(\text{Z}); \qquad \lambda(y) = -\,\text{co}\lambda(\text{H}) + \text{co}\lambda(\text{Z})$$

$$\text{co}\lambda(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda(x) - \lambda(y)]; \qquad \text{co}\lambda(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda(x) + \lambda(y)].$$

3° $z > \Delta$, $\quad z = 90° + a$, $\quad \Delta = 90° + d$,

$\Delta + z > 180°$, $\quad a > d$ (valor absoluto).

III

$$\text{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \text{co}\lambda[(\Delta + z) - 180°];$$

$$\text{co}\lambda(y) = \text{co}\lambda(z - \Delta) - \lambda(l)$$

$$\lambda(x) = -\,\text{co}\lambda(\text{H}) - \text{co}\lambda(\text{Z}); \qquad \lambda(y) = \text{co}\lambda(\text{Z}) - \text{co}\lambda(\text{H})$$

$$\text{co}\lambda(\text{H}) = -\frac{1}{2}[\lambda(y) + \lambda(x)]; \qquad \text{co}\lambda(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda(y) + \lambda(x)].$$

4° $\Delta > z$, $\quad \Delta = 90° - d$, $\quad z = 90° - a$,

$\Delta + z < 180°$, $\quad a > d$ (valor absoluto).

IV

$$\text{co}\lambda(x) = \lambda(l) - \text{co}\lambda(\Delta + z); \qquad \text{co}\lambda(y) = \text{co}\lambda(\Delta - z) - \lambda(l);$$

$$\lambda(x) = \text{co}\lambda(\text{H}) + \text{co}\lambda(\text{Z}); \qquad \lambda(y) = \text{co}\lambda(\text{H}) - \text{co}\lambda(\text{Z});$$

$$\text{co}\lambda(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda(x) + \lambda(y)]; \qquad \text{co}\lambda(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda(x) - \lambda(y)].$$

5° $\Delta > z$, $\Delta = 90° + d$, $z = 90° - a$,
$\Delta + z < 180°$, $d < a$ (valor absoluto).

V

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z); \qquad \text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \lambda\,(l);$$

$$\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) + \text{co}\lambda\,(\text{Z}); \qquad \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z});$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) + \lambda\,(y)]; \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)].$$

6° $\Delta > z$, $\Delta = 90° + d$, $z = 90° + a$,
$\Delta + z > 180°$, $d > a$ (valor absoluto).

VI

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,(\Delta + z - 180°];$$

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \lambda\,(l);$$

$$\lambda\,(x) = -\,\text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}); \qquad \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z});$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(y) - \lambda\,(x)]; \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = -\frac{1}{2}[\lambda\,(y) + \lambda\,(x)].$$

Tales son las expresiones mercatoriales a que hemos llegado para resolver el problema, capital en navegación, del cálculo simultáneo del *horario* y del *azimut*, con brevedad y exactitud por nuestras últimas tablas.

57. Considerando con atención estas fórmulas se advierte que :

1° La expresión de co$\lambda\,(x)$ es en todos los casos en que $\Delta + z > 180°$

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z) \qquad [\text{I, II, IV y V}];$$

2° La expresión de co$\lambda\,(y)$ es, en todos los casos, en que $z > \Delta$

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(z - \Delta) - \lambda\,(l) \qquad [\text{I, II y III}];$$

3° Cuando $\Delta > z$, la misma expresión es

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \lambda\,(l) \qquad [\text{IV, V y VI}];$$

4° La expresión de $\lambda\,(x)$ es, en todos los casos, en que $\Delta + z < 180°$

$$\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) + (\text{Z}) \qquad [\text{I, II, IV y V}];$$

5° Cuando $\Delta + z > 180°$, dicha expresión se cambia en

$$\lambda\,(x) = -\,\text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}) \qquad [\text{III y IV}];$$

6° La expresión de $\lambda(y)$ es, para $z > \Delta$ y $z + \Delta \gtrless 180°$

$$\lambda(y) = -\, co\lambda(H) + co\lambda(Z) \qquad [I, II \text{ y } III];$$

7° Esa expresión de $\lambda(y)$ es, en los casos de ser $\Delta > z$, sea $\Delta + z \gtrless 180°$

$$\lambda(y) = co\lambda(H) - co\lambda(Z) \qquad [IV, V \text{ y } VI];$$

8° La fórmula que da $co\lambda(H)$ es una semisuma de lambdas positivas, para $\Delta > z$, mientras sea $\Delta + z < 180°$

$$co\lambda(H) = \frac{1}{2}[\lambda(x) + \lambda(y)] \qquad [IV \text{ y } V];$$

y en los mismos casos,

$$co\lambda(Z) = \frac{1}{2}[\lambda(x) - \lambda(y)],$$

es una semidiferencia entre las mismas lambdas;

9° Cuando es $\Delta + z > 180°$, $co\lambda(H)$ es una semisuma negativa a lambdas, si es $z > \Delta$, y debe escribirse empezando por $\lambda(y)$, y el horario es mayor de seis horas,

$$co\lambda(H) = -\frac{1}{2}[\lambda(y) - \lambda(x)].$$

La colambda del azimut es la semidiferencia entre las mismas lambdas

$$co\lambda(Z) = \frac{1}{2}[\lambda(y) - \lambda(x)];$$

10° Si siendo $\Delta + z > 180°$ es $\Delta > z$, las colambdas, del horario y del azimut precedentes vienen permutadas,

$$co\lambda(H) = \frac{1}{2}[\lambda(y) - \lambda(x)], \qquad co\lambda(Z) = -\frac{1}{2}[\lambda(y) - \lambda(x)],$$

y el azimut es mayor de 90°;

11° Si comparamos las fórmulas que dan las incógnitas en relaciones tales como $z > \Delta$, $z = 90° - a$, $\Delta = 90° - d$, $\Delta + z < 180°$ y $\Delta > z$, $\Delta = 90° - d$, $z = 90° - a$, $\Delta + z < 180°$, veremos que las expresiones respectivas de $co\lambda(H)$ y $co\lambda(Z)$, de la primera se convierten en $co\lambda(Z)$, y $co\lambda(H)$ para la segunda. Lo mismo ocurre para los otros valores análogos que llamaremos *conjugados*.

58. Comprobamos ahora con algunos ejemplos las ventajas del uso de este nuevo método de cálculo trigonométrico. Ante todo debemos recordar las correcciones que suponen los datos para ser introducidos como tales en el cálculo.

1° La altura observada a_0 debe reducirse a verdadera a_v, despojándola : del *error instrumental* e_i, de la *depresión* aparente del horizonte, D_a si hubiera sido observada sobre el del mar, de la *refracción media* R_m o de la correspondiente al estado atmosférico, R_a según la exactitud que pueda pedirse a las circunstancias en que haya sido hecha la observación, de la *paralaje de altura* P_a y del *semidiámetro* S_a relativo a la altura, si ésta comporta diferencia con el *horizontal* o el *geocéntrico*. Así se tiene :

$$a_v = a_0 \pm e_i - D_a - R_a + P_a \pm S_a.$$

Si se observó la altura del borde inferior del astro $\underline{a_0}$ se suma el semidiámetro, en el otro caso $\overline{a_0}$, se resta, y si el astro no lo ofrece, $S_a = 0$. Si la observación se hizo con el teodolito, o sobre el horizonte artificial con el sextante, $D_a = 0$, pero como en este último caso (horar. artif.), la altura observada es doble, debe tomarse $\frac{1}{2}[a_0 \pm e_i]$ y seguir con las correcciones de $R_a P_a$ y S_a.

2° Si se tiene conocimiento de la hora aproximada del observador y de la longitud del lugar, se deduce la hora del meridiano de las *Efemérides astronómicas* (N. A.), (C. de T), sumando la hora con la longitud, si ésta es occidental, o restándola de la hora si fuese oriental; el resultado es la hora del primer meridiano, simultánea con la de la observación, es decir, que corresponde al mismo instante físico. Se tiene así :

$$H^1 = H_0 \pm L_0,$$

H^1 = hora del mismo meridiano (efemérides), H_0 = hora del observador, L_0 o L_e longitud occidental u oriental (en tiempo) respecto al primer meridiano.

3° Otro método más conveniente se basa en el empleo de un cronómetro *arreglado*, esto es, cuyo adelanto o atraso (estado absoluto) respecto a la hora media de un meridiano (de preferencia el de las efemérides), se conoce para una fecha dada, y cuyo adelanto o atraso diario (movimiento diario) es conocido también. La fórmula siguiente permite calcular la hora del primer meridiano corres-

pondiente a la leída en el cronómetro en el momento de una observación.

$$\frac{H^{I}}{C-(C_0+nm)}=\frac{24^{h}}{24^{h}+m}; \qquad H^{I}=[C-C_0+nm]\frac{24^{h}}{24^{h}+m};$$

$$H_1=[C-(C_0+nm)]\left(1-\frac{m}{24}\right),$$

en que C es la hora del cronómetro en el momento de la observación, C_0 la hora que marcaba en una época anterior Δ a 0^h del meridiano del arreglo, n el número de días transcurridos entre las época Δ y actual. y m el movimiento diario en adelanto o atraso. Haciendo $C-(C_0+nm)=t$ que puede considerarse como el estado absoluto en la fecha actual y que debe tabularse, se tiene :

$$H^{I}=t\left(1-\frac{m}{24^{h}}\right)=t-t\frac{m}{24^{h}}.$$

Los productos $\frac{m}{24^{h}}$ para diferentes valores de t en horas y fracción decimal se tabulan también y así se obtiene rápidamente la hora H^{I} correspondiente a la C del cronómetro.

4° La declinación, la ascensión recta, la ecuación de tiempo u otro cualquiera elemento que se necesite para la hora de la observación C, se calcula para la hora simultánea H^{I} del primer meridiano (el de las efemérides) admitiendo la proporcionalidad entre variaciones y tiempos.

Regularmente la d y R, van acompañadas de sus variaciones horarias, y así el cálculo para la hora H^{I} resulta muy sencillo. Por ejemplo :

$$d^{I}=d_c \quad \pm\frac{\Delta d}{24}\cdot H^{I} \qquad \text{o} \qquad d_c = d\pm V_d{}^{h}\,.\,H^{I}.$$

en que d es la declinación del astro el día de la fecha a 0^h del meridiana de las efemérides, y d^{I} o d_c la declinación para H^{I}, o sea la declinación corregida.

59. Ejemplos de horario y azimut : 1° En latitud de 54°36′ N y longitud $1^h 40^m$ O se observó al oeste una altura de luna que reducida a verdadera resultó de 29° 46′30″. Se pide la hora media H_m del observador, siendo la d y R de la luna para la hora 11^h del primer meri-

diano correspondiente a la altura $-d = +3°48'29''$ y la $R = \alpha = 12^h 14^m 57^s{,}67$. Los demás elementos para el cálculo son $z = 60°13'30''$, $\Delta = 86°11'31''$, $l = 54°36'$ N. Se halla *(Fontechan,* I, pág. 212, ej. 3°), $H_a{}^0 = 2^h 40^m 12^s$, $H_{m\ obs.} = 9^h 20^m 55^s{,}64$ en el momento de tomar la altura.

Aquí es $\Delta > z$, $\Delta = 90° - d$, $z = 90° - a$ y $a > d$, luego corresponden las fórmulas de IV.

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z \qquad \text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \lambda\,(l)$$

$$\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) + \text{co}\lambda\,(\text{Z}) \qquad \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z})$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) + \lambda\,(y)] \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = \frac{1}{2}[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)]$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\,(l) &= 3926{,}33 \\
\text{co}\lambda\,(\Delta + z) &= -4118{,}86 + \\
\text{co}\lambda\,(x) &= 8045{,}19 \\
\text{co}\lambda\text{ tab.} &= \phantom{-8045{,}}71 \\
& \phantom{= -8045{,}}52 \\
\lambda\,(x)\text{ tab.} &= 664{,}09 \\
pp\text{ por } 0{,}92 &= 0{,}10 \\
\lambda\,(x) &= 664{,}19 \\
\text{co}\lambda\,(\Delta - z) &= 5043{,}95
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\,(l) &= 3926{,}33 - \\
\text{co}\lambda\,(y) &= 1117{,}62 \\
\lambda\,(y)\text{ tab.} &= 6275{,}46 \\
\lambda\text{ correg.} &= 6275{,}63 \\
\frac{s}{2} &= 3469{,}91 \\
\frac{s}{2}\text{ tab.} &= 70{,}20 \\
& 0{,}29 \\
H_a{}^0 &= 2^h 40^m 11^s{,}1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\,(x) &= 664{,}19 \\
\lambda\,(y) &= 6275{,}63 \\
s &= 6939{,}82 \\
\frac{s}{2} &= 3469{,}91
\end{aligned}
$$

$$d = -5611{,}44$$

$$\frac{d}{2} = -2805{,}72$$

$$\frac{d}{2}\ \text{tab.} = \qquad 99$$

$$Z\ \text{tab.} = \ 47°42'12''$$

$$180$$

$$Z = 132°17'48''$$

Para concluir el cálculo hay que sumar el horario occidental con la R, de esta suma (hora siderea restar la R_m del Sol para la 0^h tiempo medio del meridiano del observador), la diferencia que a un intervalo sidereo convertido en intervalo de tiempo medio, y ese será la hora media pedida del observador. $H_{a\Delta} + R_\Delta = H_{a\,.\,0m} + J_{0m}$.

Contractemos el *azimut* por la fórmula

$$\cos^2 \frac{Z}{2} = \cos \frac{S}{2} \cos \left(\frac{S}{2} - \Delta\right) \sec l \sec a \qquad \text{con log de cinco decimales.}$$

$$a = \ 29°46'30''$$

$$l = \ 54\ \ 46 \qquad N$$

$$\Delta = \ 86\ \ 11\ 31$$

$$S = 170°34'01''$$

$$\frac{S}{2} = \ 85\ \ 17\ 01$$

$$\Delta = \ 86\ \ 11\ 31$$

$$\Delta - \frac{s}{2} = \quad 0°54'30''$$

$$\log \sec a = \ 0{,}06149$$

$$\log \sec l = \ 0{,}23711$$

$$\log \cos \frac{S}{2} = \ 8{,}91500$$

$$\log \cos \left(\frac{S}{2} - \Delta\right) = \ 9{,}99995$$

$$\log \cos^2 \frac{Z}{2} = 19{,}21355$$

$$\log \cos \frac{Z}{2} = \ 9{,}60677$$

$$704$$

$$78$$

$$\frac{Z}{2} = 66° \ 8'56''$$
$$Z = 132 \ \ 17 \ 52$$

El *azimut* calculado con logaritmos de Gauss (con 5 decimales) dió :

$$Z = 132°18' \text{ N al O}$$

$$Z_m = 132 \ \ 17 \ 18''$$

Los resultados concuerdan con poca diferencia.

2° En Terry (*Manual del Navegante,* 4ª edic.), se halla en la página 135, un ejemplo para el cálculo de la hora media del orto aparente del Sol, con estos datos : $l = 39°23'17''$, $\Delta = 94°5'21''$, $a = -0°22'24''$ y halla horario oriental $= 5^h 48^m 28^s$. Busquemos horario y azimut.

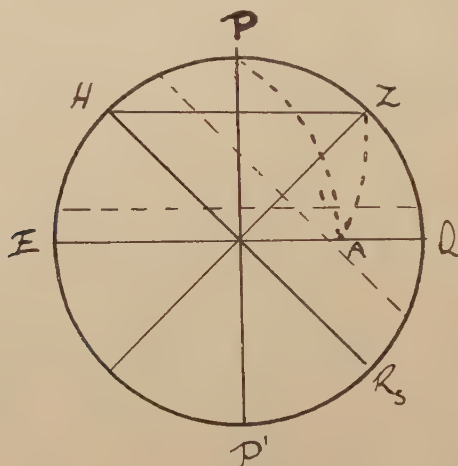


Figura 4

Notemos que aquí es $\Delta > z$ y $\Delta + z > 180°$, puesto que $\Delta = x = 94°5'21''$ y $z = 90°22'24''$, luego las fórmulas convenientes son las de (VI).

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) + \text{co}\lambda\,[(\Delta + z) - 180°];$$

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \lambda\,(l);$$

$$\lambda\,(x) = -\,\text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}); \qquad \lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z});$$

$$\text{co}\lambda\,(\text{H}) = \frac{1}{2}\,[\lambda\,(y) - \lambda\,(x)]; \qquad \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = -\frac{1}{2}\,[\lambda\,(y) + \lambda\,(x)].$$

Preparación del cálculo :

$$\Delta = 94^\circ\ 5'21''$$
$$z = 90\ 22\ 24$$
$$\Delta + z = 184^\circ 27'45''$$
$$\Delta + z - 180^\circ = 4^\circ 27'45''$$
$$\Delta - z = 3\ 42\ 57$$
$$l = 39\ 23\ 17$$

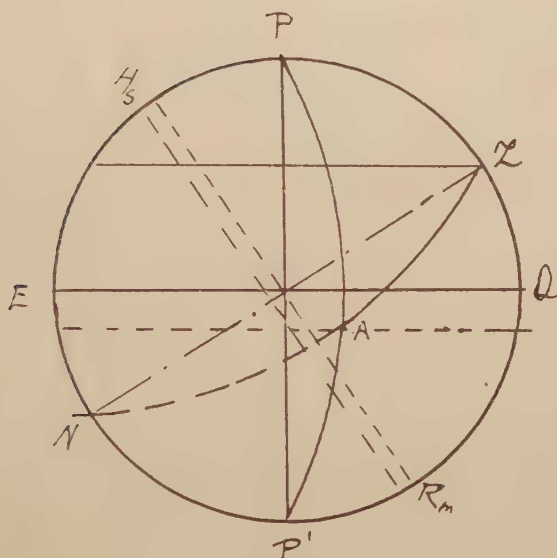


Figura 5

$$\lambda(l)\ \text{ap.} = \lambda(39^\circ 23'15'')$$
$$= 2574{,}93$$
$$\text{P}p \text{ por } 2'' = 0{,}04{,}31$$
$$\lambda(l) = 2574{,}97{,}31$$
$$\text{co}\lambda(\Delta + z - 180^\circ) = 11156{,}04$$
$$\text{co}\lambda(\Delta - z)\ \text{tab} = \text{co}\lambda(3^\circ 43')$$
$$= 11785{,}27$$
$$\text{P}p \text{ por } 3'' = 77{,}30$$
$$\text{co}\lambda(\Delta - z) = 11766{,}04$$

Cálculo de $\text{co}\lambda(x)$:

$$\lambda(l) = 2574{,}97$$
$$\text{co}\lambda(\Delta + z - 180^\circ) = 11156{,}04$$
$$\text{co}\lambda(x) = 13731{,}01$$

Cálculo de $\text{co}\lambda\,(y)$:

$\text{co}\lambda\,(\Delta - z) =$	$11786{,}04$		
$\lambda\,(l) =$	$2574{,}97$ —		
$\text{co}\lambda\,(y) =$	$9211{,}07$		
$\text{co}\lambda\,(y)$ tab $=$	$9212{,}57$	corresp.	$472{,}23$
dif- $\text{co}\lambda\,(y) =$	$1{,}50$	*pp* por dif.	20
		$\lambda\,(y)$	$= 472{,}43$

Cálculo de $\lambda\,(x)$:

$\text{co}\lambda\,(x)$ tab $=$	$13722{,}78$	corresp. $=$	$126{,}61$
$\text{co}\lambda\,(x) =$	$13731{,}01$	*pp*	6
	$1{,}77$	$\lambda\,(x) =$	$126{,}67$

Cálculo de los ángulos H y Z :

$$\lambda\,(x) = 126{,}67 \; —$$
$$\lambda\,(y) = 472{,}43$$
$$\lambda\,(y) - \lambda\,(x) = 345{,}76$$
$$\frac{1}{2}[\lambda\,(y) - \lambda\,(x)] = 172{,}88$$
$$2{,}90$$
$$\text{H ap.} = 0{,}02$$
$$5^{h}48^{m}28^{s}67$$
$$\text{P}p \text{ por } 2 = 3 \;\; 03$$
$$\text{H}_e = 5^{h}48^{m}28^{s}7$$

$$\lambda\,(x) = 126{,}67$$
$$\lambda\,(y) = 472{,}43$$
$$\lambda\,(y) + \lambda\,(x) = 599{,}10$$
$$\frac{1}{2}[\lambda\,(y) + \lambda\,(x)] = 299{,}55$$
$$\text{co}\lambda\,(Z) = — 299{,}55$$
$$9{,}63$$
$$\text{co}\lambda\,(Z) \text{ tab ap.} = 8$$

$$\text{Z tab ap.} = 85° \; 0'45''$$
$$pp \text{ por } 8 = 5$$
$$\text{Z tab} = 85° \; 0'50''$$
$$180$$
$$\text{Z} = \text{S. } 94°59'10'' \text{ E}$$

Comparemos el valor del azimut con el que da la fórmula de los senos que se deduce de la fundamental

$$\cos \Delta = \cos c \cos z + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} z \cos Z$$

y que es :

$$\operatorname{sen}^2 \frac{Z}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{s}{2} - c\right] \operatorname{sen}\left[\frac{s}{2} - z\right]}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} z}$$

$$\begin{aligned}
c &= \ \ 50°36'43'' \\
z &= \ \ 90\ \ 22\ 24 \\
\Delta &= \ \ 94\ \ \ 5\ 21 \\
S &= 235°04'28'' \\
\frac{S}{2} &= 117\ \ 32\ 14 \\
\frac{S}{2} - c &= \ \ 66\ \ 55\ 31 \\
\frac{S}{2} - z &= \ \ 27\ \ \ 5\ 50
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{colog} \operatorname{sen} c &= \ \ 0{,}1118959 \\
\operatorname{colog} \operatorname{sen} z &= \ \ 0{,}0000103 \\
\log \operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - c\right] &= \ \ 9{,}9637852 \\
\log \operatorname{sen}\left[\frac{S}{2} - z\right] &= \ \ 9{,}6594762 \\
2 \log \operatorname{sen} \frac{z}{2} &= 19{,}7351676 \\
& \ \ \ \ \ 9{,}8675839 \\
& \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 730 \\
& \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 108 \\
& \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 97 \\
& \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Z}{2} &= 47°29'36''6 \\
Z &= \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 \\
Z &= 94°59'11''2 \\
Z_{m} &= 94\ \ 59\ 10 \\
\text{Dif.} &= \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1''2
\end{aligned}$$

b) En *Fontecha*, tomo I, página 224, ejemplo 8°, encontramos como horario correspondiente al principio del crepúsculo matutino astronómico en un lugar de $l = 34°50'$ N con $\Delta = 66°54'13''$ y $a = -18°$, $H° = 2^h 36^m 57^s$. Verifiquemos este resultado por mercatoriales y hallamos el azimut.

Aquí es

$$z = 90° + 18° = 108° > \Delta \quad \text{y} \quad \Delta = 90° - d = 66°54'13'',$$

luego las fórmulas que corresponden son las de II, pues que

$$z + \Delta < 180°.$$

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta + z) \qquad \text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,(z - \Delta) - \lambda\,(l)$$

$$\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\mathrm{H}) + \text{co}\lambda\,(\mathrm{Z}) \qquad \lambda\,(y) = -\,\text{co}\lambda\,(\mathrm{H}) + \text{co}\lambda\,(\mathrm{Z})$$

$$\text{co}\lambda\,(\mathrm{H}) = \frac{1}{2}\,[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)] \qquad \text{co}\lambda\,(\mathrm{Z}) = \frac{1}{2}\,[\lambda\,(x) + \lambda\,(y)].$$

Preparación del cálculo :

$$\begin{aligned}
l &= 38°50'00'' \\
z &= 108\ \ 00\ 00 \\
\Delta &= 66\ \ 54\ 13 \\
z + \Delta &= 174°54'13'' \\
z - \Delta &= 41\ \ 05\ 47
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\,(l) &= 2532{,}08 \\
\text{co}\lambda\,(\Delta + z) &= -10699{,}66\ + \\
\text{co}\lambda\,(x) &= 13231{,}74 \\
\text{co}\lambda\,(x)\ \text{tab} &= 13232{,}27 \\
& 0{,}53
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{co}\lambda\,(\Delta + z)\ \text{tab} &= -10699{,}28 \\
pp\ \text{por}\ 2''\ \text{ad} & 0037{,}62 \\
& 0065{,}62 \\
\text{co}\lambda\,(\Delta + z) &= -10699{,}66 \\
\text{co}\lambda\,(z - \Delta)\ \text{tab} &= \text{co}\lambda\,.\,41°6' \\
&= 3372{,}95 \\
pp\ \text{por}\ 13'' &= \text{ad} 34 \\
\text{co}\lambda\,(z - \Delta) &= 3373{,}29 \\
\lambda\,(l) &= 2532{,}08 \\
\text{co}\lambda\,(y) &= 841{,}21 \\
\text{co}\lambda\,(y)\ \text{tab} &= 841{,}27 = 841{,}27 \\
& 0{,}06
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{co}\lambda\,(x)\ \text{tab. corresp. } \lambda\,(x)\ \text{apr.} = & 146{,}46 \\
\text{P}p\ \text{por diferencia co}\lambda\,(x) & 3 \\
\hline
 & 146{,}49
\end{array}
$$

Horario

$$
\begin{array}{rr}
\lambda\,(x) = & 146{,}49 \\
\lambda\,(y) = & 7239{,}14\ - \\
\hline
\lambda\,(x) - \lambda\,(y) = & -\,7092{,}65 \\
\frac{1}{2}\,[\lambda\,(x) - \lambda\,(y)] = & -\,3546{,}32 \\
\text{co}\lambda\,(\text{H})\ \text{tab.} = & 6{,}62 \\
\hline
 & 0{,}30
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{H tab.} = & 2^{h}36^{m}56^{s} \\
 & 2\ \ 36\ \ 56\ \ 67 \\
 & 12 \\
\hline
\text{H}_{r}{}^{o} = & 9^{h}23^{m}03^{s}33 \\
\text{H}_{\text{F}} = & 9\ \ 23\ \ 03
\end{array}
$$

Azimut

$$
\begin{array}{rr}
\lambda\,(x) = & 146{,}49 \\
\lambda\,(y) = & 7239{,}14 \\
\hline
2\ \text{co}\lambda\,(\text{Z}) = & 7385{,}63 \\
\text{co}\lambda\,(\text{Z}) = & 3692{,}81 \\
 & 2{,}90 \\
 & 9 \\
(\text{Z})\ \text{tab.} = & 37°43'0'' \\
pp\ \text{por } 9 & 3 \\
\hline
\text{Z} = & 37°43'3''
\end{array}
$$

Si se pide la hora verdadera civil del principio del crepúsculo matutino astronómico, debemos tomar como tal hora el complemento del horario verdadero oriental $9^{h}23^{m}04^{s}$ a 12 horas, por empezar a contarse el tiempo civil desde el antimeridiano, es decir, que la hora civil pedida sería $2^{h}36^{m}56^{s}$, que viene a ser el horario tabular.

c) Contrastemos el azimut mercatorial Z_m hallado, por una fórmula de cosenos que podemos derivar de la fundamental, y que es :

$$
\cos^2 \frac{Z}{2} = \frac{\cos\left(\frac{s}{2} - l\right)\cos\left(\frac{s}{2} - a\right)}{\text{co}2\,l\,\cos a}.
$$

En ella es a considerada como positiva, pues sale así de la fórmula

$$a = 18°$$
$$l = 38\ 50'$$
$$\Delta = 66\ 54\ 13''$$
$$S = 123°44'13''$$
$$\frac{S}{2} = 61\ 52\ 6$$

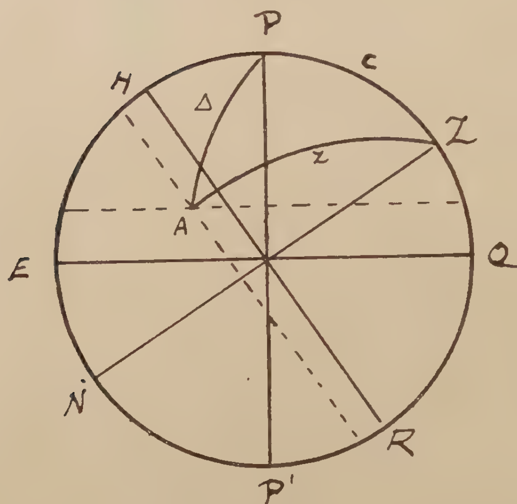


Figura 6

$$\frac{S}{2} - l = 23\ 02\ 6$$
$$\frac{S}{2} - a = 43\ 52\ 6$$
$$\log \sec a = 0{,}02179$$
$$\log \sec l = 0{,}10848$$
$$\log \cos \left(\frac{S}{2} - l\right) = 9{,}96391$$
$$\log \cos \left(\frac{S}{2} - a\right) = 9{,}85790$$
$$2 \log \cos \frac{Z}{2} = 19{,}95208$$
$$\log \cos \frac{Z}{2} = 9{,}97604$$

06

2

$$\frac{Z}{2} = 18°51'30''$$

$$2$$

$$Z = 37°43'00'' \text{ N al E.}$$

Como se ve por estos ejemplos, hay concordancia en los resultados obtenidos por el cálculo mercatorial y los efectuados por los métodos usuales.

60. Vamos ahora a ocuparnos brevemente de las fórmulas (E′), (K′) y (L′) que obtuvimos en los números 36 y 38.

Éstas, en realidad, no pertenecen al triángulo estudiado, pero sí a algunos de los *ocho* triangulos que se originan al prolongar los radios que va a los vértices del triángulo primitivo y unir los puntos m que afloran a la superficie por arcos de círculo máximo. Pero de los nuevos triángulos debemos descartar el *simétrico* y todos aquellos que no tengan común el lado c. Los restantes son los que pertenecen a la cuestión.

Ahora haciendo en la expresión de las fórmulas E′, K′, L′ sucesivamente negativo al segundo miembro, tg $\frac{H}{2}$ o tg $\frac{Z}{2}$, o introduciendo parecidas hipótesis en las fórmulas I a VI del cuadro, obtendremos valores que, en general, diferirán de los del triángulo primitivo. Como sería largo el desarrollo de este tema, y por otra parte no tiene importancia práctica para nuestra tesis, resumiremos los resultados de la investigación praticada.

1° Que la afección negativa, sea del segundo miembro, sea de cualquiera de las tangentes de los semiángulos horario o azimutal, da resultados que, en general, no convienen al triángulo fundamental.

2° Que esos resultados no son en conjunto convenientes, pero que puede serlo alguno de ellos.

3° Que siempre los valores no convenientes están ligados a los logaritmos por una relación de suplementaridad.

a) Precisando más, se advierte que el hecho de ser negativo el segundo miembro implica que los resultados sean suplementarios respecto a los de la cuestión original.

b) Si se afecta del signo negativo a tg $\frac{H}{2}$, se observa que *el horario no cambia* con respecto al que se obtiene con el segundo miembro negativo, *pero sí el azimut*, que volviéndose *suplementario* del *azimut* del caso *a)*, viene a resultar el *verdadero* del problema original.

c) Si el *signo negativo* se lo atribuimos a $\operatorname{tg}\frac{Z}{2}$, los valores *se vuelven suplementarios* de los del caso anterior *b)*, y por tanto, el *horario* resulta el *verdadero* del problema y el *azimut* el *suplementario.*

61. Relativamente a la práctica, ya sabemos que el primer caso general (aquel en que el producto y cociente de los semiángulos horario y azimutal es positivo), es el verdaderamente importante; él contiene cuanto pueda interesar al ingeniero y al marino; y como el *modus operandi* en cada caso se ha fundamentado en una *teórica rigurosa*, los resultados deben inspirarnos una absoluta confianza.

El hecho de haber podido reducir el cálculo al que tiene lugar entre números o cantidades absolutas, nos parece también una ventaja sobre los procedimientos de Guyou y de Barreda, por el menor riesgo que se corre de cometer errores. Y aunque hemos reducido el número de fórmulas con respecto a las que obtuvimos al empezar nuestras investigaciones, descartando la declinación y la altura y apelando en substitución a las distancias polar y zenital, no hemos conseguido, ni nos parece fácil lograrlo, reducir más el número de las fórmulas, en el estado actual de la teoría de *lambdas* y *colambdas* que hemos ayudado a fundamentar. Probablemente habrá en esa doctrina muchas verdades ocultas cuya revelación podrá ocupar fructuosamente a los investigadores.

Entretanto, si no se publican nuestras inéditas tablas, pueden marinos e ingenieros usarlo con confianza, valiéndose de las tablas de Barreda, o de las más conocidas y que tenemos más a la mano, de Guyou, que constituyen la II, de la colección de don Luis Pastor, tomo III, de su recomendable obra de *Astronomía náutica y navegación*, impresa por Coni en 1894 a 1896.

62. Pasemos a estudiar otro problema.

Segunda aplicación. — Dada la hora, calcular el azimut y la altura de un astro.

Los datos necesarios para la resolución de este problema, son, como se sabe, la declinación del astro corregida para la hora dada, la latitud del observador y el horario deducido de la hora.

Barreda resolvió la cuestión haciendo uso de mercatoriales y de otras funciones trigonométricas al mismo tiempo. Nosotros hemos logrado darle solución en puros mercatoriales, como pasamos a expresar.

Dividiremos la cuestión en dos partes indicadas ya por el mismo enunciado, a saber, la determinación del *azimut*, y la de la *altura*.

TEÓRICA Y SOLUCIÓN NUEVA DEL PROBLEMA DEL AZIMUT Y DEL ÁNGULO PARALÁCTICO

Puede ocurrir : 1° Que c sea mayor que Δ, $c > \Delta$, en cuyo caso Δ será necesariamente menor que 90°, pues mantenemos la hipótesis de que el triángulo está referido al polo N o S del hemisferio del observador, y en tal caso c será siempre un arco menor que 90°, luego según la proposición trigonométrica de que : a *mayor lado se opone mayor ángulo*, será $A > Z$, y por tanto, las analogías de que debemos partir hay que escribirlas como sigue :

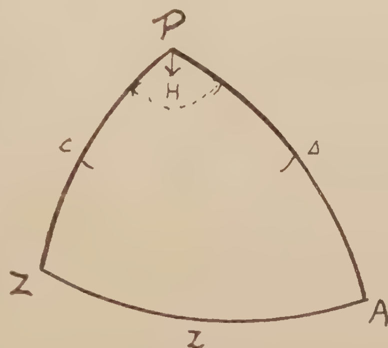


Figura 7

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[A + Z]}{\operatorname{cotg}\frac{H}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(c - \Delta)}{\cos\frac{1}{2}(c + \Delta)}, \tag{a}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[A - Z]}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[c - \Delta]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[c + \Delta]}, \tag{a'}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[A + Z]}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(c - \Delta)}{\cos\frac{1}{2}(c + \Delta)} = \frac{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{\Delta}{2} + \operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{\Delta}{2} - \operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}} = \operatorname{tg}\left[45° + \frac{x}{2}\right],$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}. \tag{d}$$

Porque siendo $\frac{c}{2}$ y $\frac{\Delta}{2}$ arcos menores que 45°, sus tangentes son fracciones propias, y así la última fracción de la igualdad es de términos positivos y valdrá más que la unidad, estando bien representada por $\operatorname{tg}\left[45° + \frac{x}{2}\right]$ en que $\frac{x}{2} < 45°$, como es fácil ver por la (d).

La segunda fórmula (b) da análogamente :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - Z)}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{\Delta}{2} - \cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{\Delta}{2} + \cos\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}} = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right], \qquad b')$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2} \qquad (d')$$

$$\frac{y}{2} < 45°.$$

En efecto, la razón expresada por el segundo miembro de la (b), es una razón entre senos de arcos agudos en que el numerador es una diferencia y el denominador una suma: vale, por tanto, menos que la unidad; luego, para la transformada (b') obtenida por operaciones legítimas, ocurrirá lo propio, y así estará por $\operatorname{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right]$ bien representada, siendo $y < 90°$.

$$\frac{c}{2} > \frac{\Delta}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} > \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}; \qquad \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} > \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}; \qquad 1 > \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}.$$

De esas fórmulas (a'), (b'), (d), (d') sacamos, respectivamente :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[A + Z] = \operatorname{cotg}\frac{H}{2}\operatorname{tg}\left[45° + \frac{x}{2}\right] \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2} \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-Z)=\operatorname{cotg}\frac{H}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ+\frac{y}{2}\right] \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}, \tag{4}$$

y tomando mercatoriales de (2), (1), (4) y (3), resultará :

$$\operatorname{co\lambda}(x)=\operatorname{co\lambda}(c)+\operatorname{co\lambda}(\Delta); \qquad \operatorname{co\lambda}(A+Z)=\lambda(x)-\operatorname{co\lambda}(H);$$

$$\operatorname{co\lambda}(y)=-\operatorname{co\lambda}(c)+\operatorname{co\lambda}(\Delta); \qquad \operatorname{co\lambda}(A-Z)=\lambda(y)-\operatorname{co\lambda}(H).$$

Luego las fórmulas que resuelven el problema en el primer caso son :

1° Para $c>\Delta$, $c<90^\circ$, $\Delta<90^\circ$, $c+\Delta<180^\circ$,

I

$$\operatorname{co\lambda}(x)=\operatorname{co\lambda}(\Delta)+\lambda(l) \tag{a}$$

$$\operatorname{co\lambda}(y)=\operatorname{co\lambda}(\Delta)-\lambda(l) \tag{b}$$

$$\operatorname{co\lambda}[A+Z]=-\lambda(x)-\operatorname{co\lambda}[H] \tag{c}$$

$$\operatorname{co\lambda}[A-Z]=\lambda(y)-\operatorname{co\lambda}(H). \tag{d}$$

Aplicadas las (a) y (b) deduciremos $\operatorname{co\lambda}(x)$ y $\operatorname{co\lambda}(y)$, cuyas lambdas nos dará la tabla, con las cuales y $\operatorname{co\lambda}(H)$ resolveremos las (c) y (d); obtendremos así :

$$\operatorname{co\lambda}(A+Z) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{co\lambda}(A-Z),$$

y, por tanto,

$$A+Z=M \qquad \text{y} \qquad A-Z=N,$$

y, por consiguiente :

$$A=\frac{M+N}{2}, \qquad Z=\frac{M-N}{2}.$$

64. 2° Si es $\Delta>c$, esto puede tener lugar, siendo $\Delta<90^\circ$ o $\Delta>90^\circ$, en ambos casos es $Z>A$. Consideremos primero que sea $\Delta<90^\circ$. En tal caso, escribiremos la segunda analogía como sigue :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z-A]}{\operatorname{cotg}\frac{H}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta-c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta+c)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1+\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=\operatorname{cotg}\left|45^\circ+\frac{y}{2}\right|, \tag{2}$$

teniéndose

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \tag{3}$$

Los mercatoriales de la primera analogía no sufren alteración, los de la segunda (2′) serán :

$$\operatorname{co}\lambda\,(y)=\operatorname{co}\lambda\,(c)-\operatorname{co}\lambda\,(\Delta)=\lambda\,(l)-\operatorname{co}\lambda\,(\Delta) \tag{3′}$$

$$\operatorname{co}\lambda\,(Z-A)=\lambda\,(y)-\operatorname{co}\lambda\,(H).$$

Luego las fórmulas del problema vienen a ser, para $\Delta > c$, y Δ y c menores de 90°,

$$\text{II}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{co}\lambda\,(x)=\operatorname{co}\lambda\,(\Delta)+\lambda\,(l),\qquad \operatorname{co}\lambda\,(y)=\lambda\,(l)-\operatorname{co}\lambda\,(\Delta),\\ \operatorname{co}\lambda\,(A+Z)=-\lambda\,(x)-\operatorname{co}\lambda\,(H),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{co}\lambda\,(Z-A)=\lambda\,(y)-\operatorname{co}\lambda\,(H).\end{array}\right.$$

65. 3° Si siendo $\Delta > c$, fuera $\Delta > 90°$, lo que implica que $Z > A$, podría ocurrir estos casos o Δ y c son tales que su suma no alcance a 180°, o bien que $\Delta + c$ sobrepase a 180°. Si acontece que $\Delta + c < 180°$, no hay más que tomar mercatoriales en las analogías escritas de este modo :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z+A]}{\operatorname{cotg}\frac{H}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\Delta-c)}{\cos\frac{1}{2}(\Delta+c)}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\operatorname{tg}\left[45°+\frac{x}{2}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z-A]}{\operatorname{cotg}\frac{H}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta-c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta+c)}=\frac{1-\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1+\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\operatorname{cotg}\left[45°+\frac{y}{2}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

pues que sus términos son positivos, y se obtendrá

$$\operatorname{co}\lambda\,(x)=\operatorname{co}\lambda\,(\Delta)+\lambda\,(l),\qquad \operatorname{co}\lambda\,(Z+A)=-\operatorname{co}\lambda\,(H)-\lambda\,(x),$$

$$\operatorname{co}\lambda\,(y)=\lambda\,(l)-\operatorname{co}\lambda\,(\Delta),\qquad \operatorname{co}\lambda\,(Z-A)=\lambda\,(y)-\operatorname{co}\lambda\,(H).$$

Luego las fórmulas mercatoriales de este caso son :

$$\Delta > c, \qquad \Delta > 90°, \qquad c < 90°, \qquad \Delta + c < 180°,$$

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} \text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\Delta) + \lambda\,(l), \qquad \text{co}\lambda\,(y) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta), \\ \text{co}\lambda\,(Z + A) = -\,\text{co}\lambda\,(H) - \lambda\,(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{co}\lambda\,(Z - A) = \lambda\,(y) - \text{co}\lambda\,(H). \end{array} \right.$$

66. 4° Si ocurriera que $\Delta + c > 180°$, resultará obtusa la suma de los ángulos opuestos a Δ y c, es decir, $Z + A > 180°$, y en tal virtud la analogía

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(Z + A)}{\operatorname{cotg} \frac{H}{2}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\Delta - c)}{\cos \frac{1}{2}(\Delta + c)}, \qquad (1)$$

tendrá negativa la $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(Z + A)$, así como también el $\cos \frac{1}{2}(\Delta + c)$.

Operando con logaritmos ordinarios nada importaría esa circunstancia, aplicando bien los principios trigonométricos, pero con los mercatoriales se necesita de antemano convertir en positivas las cantidades que no lo fueron y operar con la mayor atención para libertarse de errores.

Sabemos que :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}[Z + A] = -\operatorname{tg}\left[180° - \frac{1}{2}[Z + A]\right],$$

pero siendo $\frac{1}{2}[Z + A] > 90°$ su suplemento $180° - \frac{1}{2}(Z + \Delta)$, será menor que $90°$.

Por otra parte :

$$\cos \frac{1}{2}(\Delta + c) = -\cos\left[180° - \frac{1}{2}(\Delta + c)\right];$$

llevemos estos valores a la primera analogía y será

$$\frac{-\operatorname{tg}\left[180° - \frac{1}{2}(Z + A)\right]}{\operatorname{cotg} \frac{H}{2}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\Delta - c)}{-\cos\left[180° - \frac{1}{2}(\Delta + c)\right]}$$

o bien

$$\frac{\operatorname{tg}\left[180^\circ - \frac{1}{2}(Z + \Delta)\right]}{\operatorname{cotg}\frac{H}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\Delta - c)}{\cos\left[180^\circ - \frac{1}{2}(\Delta + c)\right]}.$$

Pero $\operatorname{tg}\left[180^\circ - \frac{1}{2}(Z + A)\right]$ se transforma sucesivamente en

$$\operatorname{tg}\left[180^\circ - \frac{1}{2}(Z + A)\right] = \operatorname{tg}\left[90^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}(Z + A)\right] =$$

$$= \operatorname{cotg}\left[- 90^\circ + \frac{1}{2}(Z + A)\right] = - \operatorname{cotg}\left[90^\circ - \frac{1}{2}[Z + A]\right].$$

Como esta última expresión representa en el paréntesis un arco negativo por ser $\frac{1}{2}(Z + A) > 90^\circ$, si le cambiamos el signo al arco invirtiendo la diferencia deberemos cambiarlo a la función y se convertirá en $\operatorname{cotg}\left[\frac{1}{2}(Z + A) - 90^\circ\right]$ o bien en $\operatorname{cotg}\left[\frac{(Z + A) - 180^\circ}{2}\right]$.

Y como hemos visto [14, 4ª] que el logaritmo de una cotangente es igual a la colambda del doble arco, será

$$\log \operatorname{cotg}\left[\frac{(Z + \Delta) - 180^\circ}{2}\right] = \operatorname{co}\lambda\,[(Z + \Delta) - 180^\circ].$$

Por otra parte,

$$\cos\left[180^\circ - \frac{1}{2}(\Delta + c)\right] = \cos 180^\circ \cos\frac{1}{2}(\Delta + c) +$$

$$+ \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta + c).$$

El segundo término es nulo, y el primero equivale a $-\cos\frac{1}{2}(\Delta + c)$. Como $\cos\frac{1}{2}(\Delta + c)$ es negativo, la expresión igual y de signo opuesto $-\cos\frac{1}{2}(\Delta + c)$ será positiva, y así la relación primitiva se habrá convertido en la analogía de igual valor absoluto

$$\frac{\operatorname{cotg}\left[\dfrac{(Z + A) - 180^\circ}{2}\right]}{\operatorname{cotg}\dfrac{H}{2}} = \frac{\cos\dfrac{1}{2}(\Delta - c)}{-\cos\dfrac{1}{2}(\Delta + c)} =$$

$$= \frac{\cos\dfrac{\Delta}{2}\cos\dfrac{c}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}}{-\cos\dfrac{\Delta}{2}\cos\dfrac{c}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{cotg}\dfrac{\Delta}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{c}{2}}{1 - \operatorname{cotg}\dfrac{\Delta}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{c}{2}} = \operatorname{tg}\left|45^\circ + \frac{x}{2}\right|.$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}.$$

Expresiones legítimas, puesto que la fracción primera del segundo miembro expresa una relación positiva entre cosenos, siendo el numerador mayor que el denominador, ya que el coseno de una diferencia es mayor que el coseno de la suma de los mismos términos; luego la relación estará bien representada por la $\operatorname{tg}\left|45^\circ + \dfrac{x}{2}\right|$, porque siendo positivo el denominador, debe ser

$$\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} > \frac{\Delta}{2}\cos\frac{c}{2},$$

por tanto,

$$1 > \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}.$$

También hubiéramos podido probar que

$$\operatorname{tg}\left|180^\circ - \frac{c}{2}(Z + \Delta)\right| = \operatorname{tg}\left[\frac{360^\circ - (Z + \Delta)}{2}\right]$$

al tomar logaritmos se convierte en $-\operatorname{colg}[360^\circ - (Z + A)]$, pero conviene más la otra expresión.

Cuanto a la analogía

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}|Z - \Delta|}{\operatorname{cotg}\dfrac{H}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\Delta - c)}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\Delta + c)} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta}{2}\cos\dfrac{c}{2} - \cos\dfrac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\Delta}{2}\cos\dfrac{c}{2} + \cos\dfrac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}}$$

expresa ya una relación entre cantidades positivas, de modo que podemos transformarla en :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(Z - A) = \operatorname{cotg}\frac{H}{2}\cdot\frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{H}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{y}{2}\right],$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2},$$

de las que deducimos, tomando mercatoriales :

$$\mathrm{co}\lambda\,(Z - A) = \lambda\,(y) - \mathrm{co}\lambda\,(H), \qquad \mathrm{co}\lambda\,(y) = \mathrm{co}\lambda\,(c) - \mathrm{co}\lambda\,(\Delta).$$

De modo que las fórmulas que resuelven el problema en el caso de ser :

$$\Delta + c > 180^\circ, \quad \Delta > c, \quad \Delta = 90^\circ + d, \quad c = 90^\circ - l, \text{ serán :}$$

$$\text{IV}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{co}\lambda\,(x) = -\lambda\,(l) - \mathrm{co}\lambda\,(\Delta), \qquad \mathrm{co}\lambda\,(y) = \lambda\,(l) - \mathrm{co}\lambda\,(\Delta), \\ \mathrm{co}\lambda\,[(Z + A) - 180^\circ] = \mathrm{co}\lambda\,(H) + \lambda\,(x), \\ \qquad\qquad \mathrm{co}\lambda\,(Z - A) = \lambda\,(y) - \mathrm{co}\lambda\,(H). \end{array}\right.$$

67. En este problema conviene expresar las fórmulas en términos de d y l; porque d sale de las efemérides y l de cálculos previos.

Así, si es $c > \Delta$, $c < 90^\circ$, $\Delta < 90^\circ$ o $c = 90^\circ - l$, $\Delta = 90^\circ - d$ y $d > l$, será :

$$\text{I}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{co}\lambda\,(x) = \mathrm{co}\lambda\,(\Delta) + \lambda\,(l) = \lambda\,(d) + \lambda\,(l), \\ \qquad\qquad \mathrm{co}\lambda\,(y) = \mathrm{co}\lambda\,(\Delta) - \lambda\,(l) = \lambda\,(d) - \lambda\,(l), \\ \mathrm{co}\lambda\,[A + Z] = -\lambda\,(x) - \mathrm{co}\lambda\,(H), \\ \qquad\qquad \mathrm{co}\lambda\,[A - Z] = \lambda\,(y) - \mathrm{co}\lambda\,(H). \end{array}\right.$$

$$\Delta > c, \quad \Delta < 90^\circ, \quad \Delta + c < 180^\circ, \quad l > d, \quad \text{valor absoluto,}$$

$$\text{II}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(d) + \lambda\,(l), \\ \qquad\qquad \mathrm{co}\lambda\,(y) = \lambda\,(l) - \mathrm{co}\lambda\,(\Delta) = \lambda\,(l) - \lambda\,(d), \\ \mathrm{co}\lambda\,[Z + A] = -\lambda\,(x) - \mathrm{co}\lambda\,(H), \\ \qquad\qquad \mathrm{co}\lambda\,[Z - A] = \lambda\,(y) - \mathrm{co}\lambda\,(H), \end{array}\right.$$

$$\Delta > c, \quad \Delta = 90° + d, \quad \Delta + c < 180°,$$

III
$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\Delta) + \lambda\,(l) = \lambda\,(l) - \lambda\,(d),$$
$$\text{co}\lambda\,(y) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta) = \lambda\,(l) + \lambda\,(d),$$
$$\text{co}\lambda\,(Z + A) = -\,\text{co}\lambda\,(H) - \lambda\,(x),$$
$$\text{co}\lambda\,(Z - A) = -\,\text{co}\lambda\,(H) + \lambda\,(y).$$

$$\Delta + c < 180°, \quad \Delta > c, \quad \Delta = 90° + d, \quad c = 90° - l,$$

IV
$$\text{co}\lambda\,(x) = -\,\lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta) = -\,\lambda\,(l) + \lambda(d),$$
$$\text{co}\lambda\,(y) = \lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(l) - \text{co}\lambda\,(\Delta) = \lambda\,(l) + \lambda\,(d),$$
$$\text{co}\lambda\,[(Z + A) - 180°] = \text{co}\lambda\,[H] + \lambda\,(x),$$
$$\text{co}\lambda\,[Z - A] = \lambda\,(y) - \text{co}\lambda\,(H).$$

l y d en todos los casos deben tomarse absolutos.

68. Esclarezcamos la teoría con algunos ejemplos :

1° Sean $l = 35°40'$ N, $d = 3°56'27''$. Aquí es

$$\Delta = 90° - d > c = 90° - l,$$

y las fórmulas las del caso II, $H° = 4^h 25^m 19^s$.

$\lambda\,(l) = 2293,32$
$\lambda\,(d) = \ \ 236,66$
$\text{co}\lambda\,(x) = 2529,98$
30,15
0,17

$\lambda\,(x)$ tab. $= 3587,12$
Pp por 17 ,21
$\lambda\,(x) = 3587,33$

$\lambda\,(l) = 2293,32$
$\lambda\,(d) = \ \ 236,66$
$\text{co}\lambda\,(y) = 2056,66$
,75
0,09

$\lambda\,(y)$ tab. $= 4249,26$ 0,09
Pp por 0,09 $=$,15
$\Delta\,(y) = 4249,41$

$$Z + A = 154°\ 4'33''$$
$$Z - A = 27\ 56\ 6$$
$$2Z = 202°00'39''$$
$$2A = 106\ 08\ 27$$
$$Z = 101\ 00\ 20$$
$$A = 53\ 04\ 13$$

$$co\lambda\,(H) = 1462{,}46 -$$
$$\lambda\,(x) = 3587{,}33 -$$
$$co\lambda\,(Z + A)\ tab. = -\ 5049{,}79$$
$$(Z + A)\ tab. = 50{,}27$$
$$0{,}48$$

$$Z - A = 25°55'27''\ tab.$$
$$180$$
$$Z + A = 154°04'33''$$

$$co\lambda\,(H) = 1462{,}46 -$$
$$\lambda\,(y) = 4249{,}41 +$$
$$co\lambda\,(Z - A) = 2786{,}95$$
$$co\lambda\,(Z - A)\ ap.\ \ 7{,}09$$
$$Z - A = 47°56'6''$$

Operemos con las fórmulas de Neper.

$$tg\,\frac{1}{2}(Z + A) = cotg\,\frac{H}{2}\cos\frac{1}{2}(\Delta - c)\sec\frac{1}{2}(\Delta + c)$$

$$tg\,\frac{1}{2}(Z - A) = cotg\,\frac{H}{2}\,sen\,\frac{1}{2}(\Delta - c)\,cosec\,\frac{1}{2}(\Delta + c)$$

$$\Delta = 86°\ 3'33''$$
$$c = 54\ 20\ 00$$
$$\Delta + c = 140°23'33''$$
$$\Delta - c = 31\ 43\ 33''$$
$$\frac{1}{2}(\Delta + c) = 70\ 11\ 46$$
$$\frac{1}{2}(\Delta - c) = 15\ 51\ 46$$
$$\frac{H}{2} = 2^h\,12^m\,39^s{,}5$$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{H}{2} = 0{,}18479$$

$$1$$

$$\log \cos \frac{1}{2} (\Delta - c) = 9{,}98313$$

$$\log \sec \frac{1}{2} (\Delta + c) = 0{,}46979$$

$$26$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Z + A) \quad 0{,}63798$$

$$79$$

$$19$$

$$\frac{1}{2} (Z + A) = 77^\circ\ 2'20''$$

$$\frac{1}{2} (Z - A) = 23\ \ 58\ \ 9$$

$$Z = 101^\circ 00' 29''$$

$$Z_m = 101\ \ 00\ 21$$

$$\text{Dif.} = \qquad 9''$$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{H}{2} = 0{,}18479$$

$$1$$

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} [\Delta - c] = 9{,}43639$$

$$33$$

$$\log \operatorname{cosec} \frac{1}{2} [\Delta + c] = 0{,}02648$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Z - A) = 9{,}64799$$

$$\frac{1}{2} (Z - A) = 23^\circ 58'\ 9''$$

$$\frac{1}{2} (Z + A) = 77\ \ \ 2\ 20$$

$$A = 53^\circ 04' 11''$$

$$A_m = 53\ \ 04\ 13$$

$$\text{Dif.} = \qquad 2$$

2° Sea ahora $l = 25°30'$, $d = -42°45'$, $H = 23°44'$. Aquí el astro está en el hemisferio opuesto al del observador, por tanto

$$\Delta = 90° + 42°45' = 132°45' > c, \qquad c = 74°30', \qquad \Delta + c > 180°,$$

luego las fórmulas a emplear son las de IV.

$$\text{co}\lambda\,(x) = \lambda\,(d) - \lambda\,(l), \qquad \text{co}\lambda\,(y) = \lambda\,(d) - \lambda\,(l),$$

$$\text{co}\lambda\,[(Z + A) - 180°] = \text{co}\lambda\,(H) + \lambda\,(x),$$

$$\text{co}\lambda\,[Z - A] = \lambda\,(y) - \text{co}\lambda\,(H).$$

$$\begin{aligned} \lambda\,(d) &= 2842{,}63 \\ \lambda\,(l) &= 1583{,}16 \\ \text{co}\lambda\,(x) &= 1259{,}47 \\ \lambda\,(x) &= 5872{,}97 \\ \text{co}\lambda\,[(Z + A) - 180°] &= 11236{,}03 \\ & \quad\;\; 7{,}32 \\ & \quad\;\; 1{,}29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + A - 180° &= 4°21'36'' \\ Z + A &= 184\ \ 21\ 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda\,(d) &= 2842{,}63 \\ \lambda\,(l) &= 1583{,}16 \\ \text{co}\lambda\,(y) &= 4425{,}79 \\ \lambda\,(y) &= 1948{,}03 \\ \text{co}\lambda\,(H) &= 5363{,}06\ - \\ \text{co}\lambda\,[Z - A] &= -3415{,}03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Z - A)\,\text{tab.} &= 40°38'28'' \\ & \;\; 180 \\ Z - A &= 139°21'32'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + A &= 184°21'36'' \\ Z - A &= 139\ \ 21\ 32 \\ 2Z &= 323°43'08'' \\ 2A &= 45\ \ 00\ 04 \\ Z &= 161\ \ 51\ 34 \\ A &= 22\ \ 30\ 02 \end{aligned}$$

69. Comparemos estos resultados con los que nos ofrecen las fórmulas que relacionan cuatro elementos consecutivos del triángulo esférico (fig. 9):

$$\operatorname{cotg} \Delta \cos l = \operatorname{sen} l \cos P + \operatorname{sen} P \operatorname{cotg} Z, \qquad (a)$$

$$\operatorname{tg} l \operatorname{sen} \Delta = \cos \Delta \cos P + \operatorname{sen} P \operatorname{cotg} A. \qquad (b)$$

Basta operar con tablas de cinco decimales.

$$\operatorname{sen} P \operatorname{cotg} Z = \operatorname{cotg} \Delta \cos l - \operatorname{sen} l \cos P = \cos P \left| \frac{\operatorname{cotg} \Delta}{\cos P} \cos l - \operatorname{sen} l \right|,$$

y poniendo

$$\frac{\operatorname{cotg} \Delta}{\cos P} = \operatorname{cotg}(x), \qquad (1)$$

será

$$\operatorname{sen} P \operatorname{cotg} Z = \cos P \left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cos l - \operatorname{sen} l \right] = \cos P \frac{\cos (l + x)}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{cotg} Z = \operatorname{cotg} P \frac{\cos (l + x)}{\operatorname{sen} x}, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{cótg} \Delta &= 9{,}96586\,(n)\\
\log \sec P &= 0{,}03838\\
\hline
\log \operatorname{cotg} x &= 0{,}00424\\
&\phantom{= 0{,}004}30\\
&\phantom{= 0{,}0042}6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \text{ tab.} &= 44°43'14''\\
&\ 180\\
\hline
x &= 135°16'46''\\
l &= 25\ \ 30\ \ 00\\
x + l &= 160°46'46''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{cotg} P &= 0{,}35688\\
&\phantom{= 0{,}3568}3\\
\log \cos (x + l) &= 9{,}97506\,(n)\ \mathrm{A}\\
\log \operatorname{cosec} x &= 0{,}15255\\
&\phantom{= 0{,}1525}9\\
\log \operatorname{cotg} Z &= 0{,}48461\\
&\phantom{= 0{,}484}80\\
&\phantom{= 0{,}484}19
\end{aligned}$$

$$Z \text{ tab.} = 18° \ 8'27''$$
$$180$$
$$Z = 161°51'33''$$

La (*b*) se dispone análogamente, y viene :

$$\frac{\text{tg}\, l}{\cos l} = \text{tg}\, l \sec P = \text{cotg}\, y, \tag{1}$$

$$\text{cotg A} = \frac{\text{cotg P sen}\,(\Delta - y)}{\text{sen}\, y} = \text{cotg P sen}\,(\Delta - y)\,\text{cosec}\, y. \tag{2}$$

Se obtiene operando con estas dos expresiones :

$$A = 22°29'56''.$$

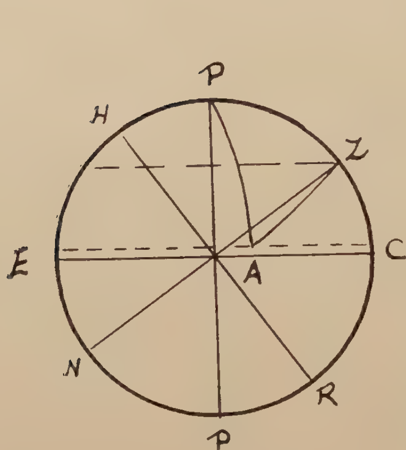


Figura 8

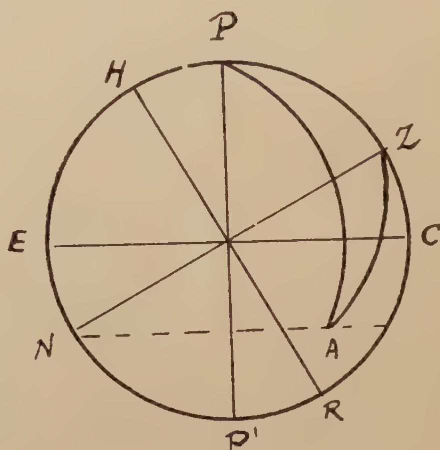


Figura 9

Con tablas de 7 decimales aun resultan más aproximados los valores a los que da el método mercatorial.

DETERMINACIÓN DE LA ALTURA

70. Una vez conocido el *azimut* por las fórmulas precedentes, se puede hallar la *altura* valiéndose de una de dos analogías de Neper. Damos la preferencia a la siguiente :

Suponiendo $Z > H$, escribiremos así la analogía de partida

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta - Z)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[Z - H]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[Z + H]}. \qquad (a)$$

Si ocurriera lo contrario, invertiríamos las diferencias, escribiendo :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(Z - \Delta)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[H - Z]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[H + Z]}. \qquad (b)$$

Tomaremos la (a) que transformaremos como sigue :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta - z) = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[Z - H]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[Z + H]} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{Z}{2}\cos\frac{H}{2} - \cos\frac{Z}{2}\operatorname{sen}\frac{H}{2}}{\operatorname{sen}\frac{Z}{2}\cos\frac{H}{2} + \cos\frac{Z}{2}\operatorname{sen}\frac{H}{2}}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right], \qquad (2)$$

en la que implícitamente se supone ser :

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}. \qquad (1)$$

La relación (1) debe ser menor que la unidad, porque, como se supone ser $Z > H$, será $\frac{Z}{2} > \frac{H}{2}$, y estos ángulos son agudos porque ni Z, ni H pueden llegar a valer 180°, y así sus mitades serán menores de 90°, por tanto, $\operatorname{tg}\frac{Z}{2} > \operatorname{tg}\frac{H}{2}$ y a causa de que $1 = \operatorname{tg}\frac{Z}{2}\operatorname{cotg}\frac{Z}{2}$ o bien

$$\operatorname{tg}\frac{Z}{2} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{Z}{2}},$$

debe ser :

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{Z}{2}} > \operatorname{tg}\frac{H}{2},$$

lo que equivale a

$$1 > \operatorname{cotg} \frac{Z}{2} \operatorname{tg} \frac{H}{2},$$

e implica que el factor fraccionario del segundo miembro sea una fracción propia positiva que estará bien representada por $\operatorname{cotg} \left[45° + \frac{x}{2} \right]$, siendo $\frac{x}{2}$ menor o a lo sumo igual a 45°.

Tomando mercatoriales en las expresiones (1) y (2), resulta :

$$\mathrm{co}\lambda\,(x) = \mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{H}) - \mathrm{co}\lambda\,(\mathrm{Z}); \qquad \mathrm{co}\lambda\,(\Delta - z) = \mathrm{co}\lambda\,(c) + \lambda\,(x), \quad (\alpha)$$

Esta última puede escribirse

$$\mathrm{co}\lambda\,(\Delta - z) = \lambda\,(l) + \lambda\,(x). \qquad (\beta)$$

Las fórmulas (α) y (β) resuelven el problema, y nos dicen que tomemos las *colambdas* de (H) y de (Z) en ese mismo orden, y restando la segunda de la primera hallaremos $\mathrm{co}\lambda\,(x)$; buscaremos la *lambda* correspondiente a esa $\mathrm{co}\lambda$ y sumándola con $\lambda\,(l)$ habremos obtenido la $\mathrm{co}\lambda$ de $(\Delta - z)$. La entrada en la tabla nos da el arco $\Delta - z$, igual a un cierto valor r, y de $\Delta - z = r$, deduciremos $z = \Delta - r$, cuyo complemento es la altura a buscada.

(Continuará.)

LONGITUDES RADIOTELEGRÁFICAS

POR JOSÉ S. CORTI
Ingeniero Civil

En el tomo CI de los *Anales*, en las páginas 11 a 77, aparece una *Memoria* firmada por el ingeniero señor José Aramburo, relativa a observaciones hechas, con la colaboración del ingeniero señor Luis M. Lascano, en el norte de la República, para la determinación de la longitud geográfica aprovechando las señales radiotelegráficas que todos los días hábiles transmite la estación de la dársena norte del puerto de Buenos Aires, dependiente del servicio hidrográfico de la marina.

Cuando esta *Memoria* llegó a mis manos, la leí con mucho interés, sobre todo, por tratarse de operaciones hechas con instrumentos corrientes, y con las incomodidades inherentes a trabajos en campaña.

De la bondad del trabajo pude juzgar, después de haber recorrido el cálculo de las veinte series de observaciones para determinación de tiempo, cálculo que aparece en las páginas 26 a 41, 44 a 55, 58 a 65 y 70 a 73.

Comparando cada serie «círculo izquierda» con la correspondiente «círculo derecha», deduje el error de índice del círculo cenital para cada serie: con él corregí el resultado de cada una de las diez observaciones de ésta; y calculé después el error probable de una observación aislada, valiéndome de la fórmula de Peters, $r = \pm\, 0{,}8453\, [v] : \sqrt{n\,(n-1)}$, en la que sólo se hace uso de los valores residuales, y no de sus cuadrados, como en la fórmula usual $r = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{[vv] : (n-1)}$.

El promedio de las veinte series dió 0,32 segundos, con un mínimo de 0,14 segundos y un máximo de 0,55 segundos.

Veamos qué valor podía esperarse, dados los elementos de que, según el autor, se hizo uso.

En la *Memoria,* página 15, el autor manifiesta haber trabajado con un teodolito de 10″. Suponiendo absolutamente correcta la graduación, y lo bastante nítida como para no dudar de si hay, o no, coincidencia entre dos rasgos, uno del círculo, otro del nonius, el error que en la lectura de cada nonius se puede cometer es de $\pm 2''5$, y en el promedio de dos, $\pm 2''5 \sqrt{0,5}$.

El autor no indica el poder del anteojo, el que puede estimarse que sería de 30 aumentos. Como una vista normal no desdobla dos visuales sidéreas sino cuando ellas forman un ángulo mayor de 60″, el auxilio de un anteojo de 30 aumentos reducirá a $60'' : 30 = \pm 2''$ el error de puntería.

Tampoco indica, el autor, la graduación de su nivel, el que, dado que se haya aplicado a un teodolito de nonius, puede estimarse que permita hacer lecturas con una indecisión de $\pm 3''$.

Tenemos, así, en cuanto del teodolito depende, que la determinación de las distancias cenitales está sujeta a errores que pueden estimarse en $\pm 2''$ por puntería, en $\pm 3''$ por lectura de nivel, y en $\pm 2''5 \sqrt{0,5}$ por lectura de nonius, lo que da un error combinado de $\pm \sqrt{2^2 + 3^2 + 0,5\,(2''5)^2} = \pm 4''$.

Refiriéndome a las observaciones de α *Virginis*, hechas el 6 de junio (cuadro VII, *Memoria*, págs. 38-39), entre una variación Δz de distancia cenital, y la correspondiente Δt del ángulo horario, existe la relación $\Delta t = 0,08\ \Delta z$. Según esto, a la variación $\pm 4''$ en z, corresponde en el ángulo horario, la variación $4 \times 0,08 = \pm 0,32$ segundos.

Como guarda tiempo, el autor dice haber hecho uso de un reloj común; y dada la forma de ligar las indicaciones de éste con la observación del astro, puede estimarse que en la lectura del reloj se comete un error de $\pm 0,20$ segundos.

En las observaciones de α *Virginis* se tendrá, entonces, un error de $\pm \sqrt{0.32^2 + 0.20^2} = \pm 0^s38$, resultado que, comparado con el promedio y los extremos que más arriba he citado, pone de manifiesto la bondad de las observaciones que figuran en la *Memoria*.

El resultado de esta comparación me indujo a escribir al autor y a su colaborador, felicitándoles por el trabajo a que la *Memoria* se refiere; y aprovechando esa circunstancia, hice algunas observaciones sobre cómo hubiera yo procedido en caso análogo al que ellos habían tratado.

También otros profesionales hicieron algunas críticas, y a todas ellas contesta el autor en una *Réplica* que aparece en los *Anales*, tomo CII, páginas 60 a 86.

Aunque no es mi ánimo entrar en polémica con motivo de la réplica a mi crítica, no me parece fuera de lugar el tratar de explicar cómo encaro yo algunos de los puntos en que discrepamos con el autor.

En mi opinión, « no debe desecharse *a priori* ningún dato que no tenga en su contra alguna indicación que haga sospechar que sea erróneo. Si sólo tiene en su contra su discrepancia con los restantes, él será retenido o desechado, según el resultado a que conduzca la aplicación de un criterio matemático basado en la teoría de las probabilidades. Para esto, yo me valgo del criterio de Chauvenet, más sencillo de aplicar que el de Peirce ».

Esta opinión, que transcribo literalmente de mi crítica, parece que ha sido mal interpretada por el autor, quien, en página 69 de *Réplica*, dice : « si el observador declara deficiente una observación en cuanto acaba de realizarla, es de suponer que la rechazará inmediatamente y que no hará cálculo ninguno con ella ».

Completamente de acuerdo : pero, yo no he querido referirme a observaciones *malas*, sino a *sospechosas*.

Así, por ejemplo : si al tomar una distancia cenital se interpone una ligera bruma entre astro y anteojo y es confusa la imagen, la observación correspondiente llevará la anotación de *visibilidad deficiente*. Esto no quiere decir que la observación *ha de ser* mala, sino que *puede serlo*. Si el cálculo conduce a un resultado concordante con el de las observaciones restantes, la observación se considera aceptable : si hay fuerte discrepancia, la anotación autoriza a desecharla.

En cuanto a desechar arbitrariamente una observación que conduce a un resultado que no concuerda con los obtenidos de otras, sostengo que en general no puede admitirse. Sólo un operador muy experimentado podría hacerlo por intuición, aunque es bien poco el trabajo que le demandaría el reemplazar ese criterio personal y arbitrario por uno científico, cual es, en nuestro caso, el de Chauvenet.

Yo considero que el criterio de Chauvenet no es un instrumento demasiado refinado para este caso. Por una parte, en su aplicación a cada serie se hace intervenir el error probable de una observación aislada, de modo que, si la serie es tosca la tolerancia será mayor que si no lo es. Se adapta, pues, a la discusión de observaciones de dis-

tinto grado de precisión; y, en especial, a las que están en cuestión, las que, a pesar de la modestia con que el autor las clasifica, merecen ser tratadas con toda consideración.

Por otra parte, el criterio para el rechazo de una observación es tanto menos estricto cuanto mayor es el número de éstas, cosa perfectamente lógica, desde que, cuantas más observaciones haya hecho un operador, tanto más fácil será que tenga alguna que se separe más que las otras del promedio general.

Si se objeta que la formación de las *vv* para el cálculo de error probable es demasiado laboriosa, diré que se puede prescindir de las *vv*, calculando el error probable con la fórmula de Peters, en vez de valerse de la fórmula común.

En cuanto a los resultados transcritos en *Réplica*, página 71, sigo opinando que todos deben ser retenidos; y que el rechazo del primero, del quinto, del noveno y del décimo, es del todo arbitrario.

Me baso, para decirlo, no tan sólo en el heeho de que la aplicación del criterio de Chauvenet autoriza a retenerlos, sino también en las siguientes consideraciones:

Más arriba, basándome en hipótesis que no podrá decirse que hayan sido exageradas en favor, sino más bien en contra, de la tesis que sostengo, he admitido que en las observaciones que discutimos se podía cometer un error de puntería de $\pm 2''$, uno de nonius de $\pm 2''5$, uno de nivel de $\pm 3''$ y uno de reloj de $\pm 0{,}2$ segundos.

No puede desconocerse que entre las distintas combinaciones de estos errores puede acontecer que en ambos nonius el error tenga, con igual signo, el valor $2''5$, y que, a la vez, los errores de puntería y de nivel influencien a z en el mismo sentido que aquéllos. En tal caso, el error de la distancia cenital viene a ser $2 + 3 + 2{,}5 = \pm 7''5$, lo que, con $\Delta t = \pm 0.08 \Delta z$ da $\Delta t = \pm 0^s6$. Si, además, se admite que también la lectura del reloj está afectada de un error que se acumula al debido a Δz se tendrá $\Delta T = \pm 0^s80$.

Nótese que si se retiene los diez valores consignados en *Réplica*, página 71, se obtiene $\Delta\pi = -4^m54^s52$ para valor de la corrección del reloj; mientras que si se rechaza a cuatro de ellos, resulta $\Delta T = -4^m54^s50$, es decir, prácticamente lo mismo. Puede, pues, tomarse a -4^m54^s5 como valor más probable de la corrección del reloj durante la observación de esa serie.

Resulta, así, que con este valor la quinta observación da $v = 1{,}0$ segundos, y las otras que, en opinión del autor, debieran también ser desechadas, dan valores aun menores para el error residual.

Ahora bien: si en las condiciones ideales que he supuesto es posible cometer un error de $\pm$ 0,8 segundos ¿se negará que éste pueda aumentar en un 25 por ciento por una puntería defectuosa, por una irregularidad del nivel, o de la graduación del círculo o del nonius, por una anomalía en la refracción, o una irregularidad en la marcha del reloj? Negarlo sería, en mi opinión, exigir del equipo de que se hizo uso mucho más de lo que él puede dar.

Para terminar: si dos eminencias como Ayri y Gould, el primero ponía en duda que pudiera establecerse un criterio científico para el rechazo de observaciones dudosas, mientras que el segundo calculó tablas para facilitar el empleo del criterio Peirce, mostrando, con ello, la discrepancia más absoluta sobre este punto; no es de extrañar que sobre el mismo estemos en desacuerdo el autor y yo, que no tenemos ni la experiencia ni la autoridad de aquéllos.

NOTICIAS VARIAS

Comisión para los homenajes a Volta

SECCIÓN ELECTROTÉCNICA

En el próximo año 1927 se cumple el primer centenario de la muerte de Alejandro Volta, y con tal motivo Italia ha resuelto celebrar la obra del gran físico con actos de carácter público.

Con tal objeto se ha constituído en Como, ciudad natal del grande, una comisión de honor bajo el alto patronato de su Majestad el Rey, y la presidencia de S. E. el presidente del Consejo de Ministros Benito Mussolini y una comisión ejecutiva.

Se ha creído que siendo Alejandro Volta uno de esos hombres excelsos que por haber abierto nuevas vías a la ciencia y al progreso humano, son beneméritos no sólo del país en que nacieron sino de la humanidad entera, y que algunas de las conmemoraciones deberían tener carácter internacional.

Teniendo en cuenta que habiendo Alejandro Volta concurrido, con su maravillosa invención de la pila, a hacer posible la telegrafía y la telefonía que deben considerarse como las primeras y más importantes aplicaciones de la electricidad a los problemas prácticos de la vida civil, se ha creído oportuno recordar la obra del gran hombre de ciencia, promoviendo la realización de una Exposición internacional y un Congreso internacional técnico y científico de telegrafía y telefonía con o sin hilos, en la ciudad de Como entre mayo y octubre de 1927.

El programa de la Exposición que encuéntrase a continuación, ha sido compilado con la intención de que dé una idea completa del origen y desarrollo de la técnica telegráfica y telefónica. La tarea del

Congreso internacional será fijada con las instituciones y con las personalidades que en él participen.

Se dirige por lo tanto invitación a las administraciones públicas o privadas que emplean servicios telegráficos y telefónicos, a las fábricas de aparatos o materiales telegráficos y telefónicos, a todos los estudiosos de los problemas de la telegrafía y de la telefonía con o sin hilos, *a enviar su adhesión*, para la participación a la Exposición o al Congreso, al *Ministerio de las Comunicaciones (Instituto Superior P. T. T., Viale del Re 131, en Roma)*, que se ocupará de transmitirla a la Comisión.

A todos, la Comisión da cita en Como en la suntuosa Villa Olmo, y en su grandioso parque para admirar juntamente el desarrollo de una técnica, que gracias a los esfuerzos de inventores, de de hombres de ciencia y de técnicos, ha sabido llevar y distribuir el pensamiento siempre a más grandes distancias, el pensamiento de una técnica que ha maravillado el mundo, cuando consiguió transmitir las señales del pensamiento a través de largos cables submarinos que unen varios continentes, por lo que se dijo que la tierra se había vuelto más chica y el hombre en vez más grande, o cuando consiguió canalizar la voz humana por largos hilos aéreos y subterráneos, entrelazando las ciudades más lejanas o cuando llegó a hacer reflejar del cielo voces humanas lanzadas a través del éter desde lugares distantes millares de kilómetros.

Admiraremos juntos los progresos de esta técnica, que tiene en sí el fáscino de las humanas idealidades y traeremos incitamiento para mayores progresos

El presidente honorario de la Comisión ejecutiva,

Como, junio 1926.

Guglielmo Marconi.

Programa de máxima para la Exposición internacional de telegrafía y telefonía con o sin hilos

1. — TELÉFONÍA Y TELEGRAFÍA CON HILOS

a) Muestra histórica. Cimelos, documentos y memorias;

b) Pilas y acumuladores;

c) Máquinas telegráficas. Sistemas de correspondencia telegráfica y dispositivos para realizarlas. Instalaciones de las oficinas;

d) Tipos de centrales telefónicas manuales y baterías locales y centrales;

e) Tipos de centrales telefónicas automáticas;

f) Tipos de materiales empleados para las líneas aéreas. Tipos de cables telegráficos y telefónicos aéreos y subterráneos y de material para su colocación;

g) Cables telegráficos y telefónicos submarinos. Aparatos empleados en la telegrafía sobre los cables;

h) Telefonía a grandes distancias. Transformadores. Bobinas Pupin. Amplificadores;

i) Aparatos de medida empleados en la técnica telegráfica y telefónica, para el estudio de las propiedades de las líneas y de los aparatos para encontrar los desperfectos;

j) Métodos empleados para buscar el estudio de las perturbaciones inductivas a que van sujetos los circuitos telegráficos y telefónicos y de las corrupciones eléctricas que van sujetas a tales cables dispositivos de protección;

k) Estadística. Demostración mediante gráficos o demás del desarrollo de los implantos telegráficos y telefónicos y del tráfico en los varios países del mundo;

l) Organización de la enseñanza de la telegrafía y de la telefonía. Colección de las publicaciones en materias telegráficas y telefónicas.

2. — TELEGRAFÍA Y TELEFONÍA SIN HILOS

a) Reseña histórica. Cimelos relativos a las experiencias clásicas. Documentos y memorias;

b) Sistemas de aparatos transmitentes. a ondas apagadas y a ondas continuas para radiotelefonía y radiodifusión. Micrófonos especiales;

c) Aparatos e implantos receptores para grandes estaciones comerciales. para estaciones de buques, para radioaudiciones y varias:

d) Tipos de aéreos y sistemas irradiantes y recibidores para varios gamas de longitud de ondas;

e) Sistemas directivos, transmisores y receptores. Radiogoniometros;

f) Sistemas especiales para la eliminación de parásitos atmosféricos;

g) Accesorios para implantos de radio;

h) Aparatos especiales para medida de alta frecuencia. Aparatos para la medida del campo eléctrico de las ondas en llegada;

i) Telegrafía y telefonía a ondas guiadas;

j) Estadística. Demostración mediante gráficos u otros, del desarrollo de las instalaciones radiotelegráficas y radiotelefónicas y del tráfico en los varios países del mundo;

k) Organización de la enseñanza de la radiotelegrafía, colección de publicaciones en materias radiotelegráfica y radiotelefónica.

Todos los materiales, los aparatos y los modelos de cada sistema se ordenarán para demostrar el desarrollo sucesivo.

Algunos de los más interesantes aparatos se instalarán para poder funcionar.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO SEGUNDO

— —

BIBLIOGRAFÍA